Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

Ю. П. Шевелев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Томск
2017

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174я73
Ш371

Рецензенты:

С. Я. Гриншпон, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета;

Л. И. Магазинников, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры математики факультета систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники

Шевелев Ю. П.

Ш371 Дискретная математика : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2017. – 223 с.

Изложены основные сведения из теории множеств, комбинаторики, теории графов, булевой алгебры логики. Приведены вводные положения прикладных вопросов теории конечных автоматов, относящихся к теме синтеза комбинационных схем, контактных структур и автоматов с памятью. В пособие включены упражнения для закрепления пройденного материала.

Для студентов, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий. Пособие может быть полезно студентам очной и вечерней форм обучения, учащимся старших классов общеобразовательных школ и всем тем, кто намерен самостоятельно освоить вводные положения дискретной математики.

© Шевелев Ю. П., 2017
© Оформление.
ФДО, ТУСУР, 2017

Оглавление

Введение

Цель дисциплины «Дискретная математика» состоит в изучении студентами основ математического аппарата, применяемого для решения задач из сферы цифровых структур, а также из области управления и алгоритмизации процессов обработки информации дискретного характера.

Главная задача курса: развить логическое, алгоритмическое и комбинаторное мышление студентов, доведя его до уровня, необходимого для освоения методов решения задач на дискретных структурах и достаточного для умения самостоятельно расширять свои математические знания, обеспечивающие дальнейший рост в профессиональной деятельности.

В пособии изложены следующие темы: теория множеств, комбинаторика, теория графов, алгебра логики и теория конечных автоматов. Все они отличаются выраженной прикладной значимостью. Подбор материала пособия осуществлялся в пределах требований ФГОС и рабочих программ таких направлений, как 11.03.01, 11.03.02, и др.

Изучив дисциплину, студент получит четкое представление о содержании основных понятий, характерных для прикладной дискретной математики, освоит методы решения задач из таких областей, как минимизация логических формул, дифференцирование и интегрирование булевых функций, синтез комбинационных и многотактных устройств дискретного действия (автоматов с памятью). Кроме того, учащийся ознакомится с комбинаторными конфигурациями, представлением задач в виде граф-схем и решением их методами теории графов.

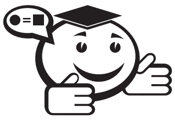
Первым четырём темам, т. е. теории множеств, комбинаторике, теории графов и алгебре логики, отведено пять первых глав. Среди них отдельной главой, ввиду её особо важного прикладного значения, представлена тема минимизации булевых формул в дизъюнктивных и конъюнктивных формах с учётом неопределённых состояний. Здесь же некоторое внимание уделено алгебре Жегалкина, симметрическим функциям и вопросам дифференцирования булевых функций. Остальные главы относятся к теории конечных автоматов. В них освещены вопросы практического применения булевой алгебры на примере комбинационных электронных схем, контактных структур и автоматов с памятью (многотактные триггерные схемы).

Большинство параграфов содержат задачи и упражнения для самостоятельной работы. Всего их 380. Для самоконтроля принята система открытых ответов, они помещены в конце пособия. Большей частью задачи и упражнения просты, лишь некоторые из них отличаются повышенной сложностью.

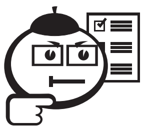
В данном пособии представлена вся та информация, которую студент должен освоить при изучении курса дискретной математики. Сведения о том, как выполнять контрольные задания, представлены в методических указаниях, являющихся приложением к данной книге. В них содержатся образцы выполнения контрольных заданий, которые помогут подготовиться к решению компьютерной контрольной работы.

Соглашения, принятые в учебном пособии

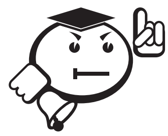
Для улучшения восприятия материала в данном учебном пособии используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



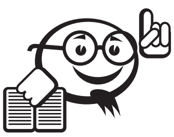
Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



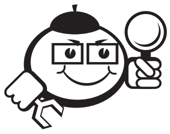
Эта пиктограмма означает задание. Здесь автор может дать указания для выполнения самостоятельной работы или упражнений, сослаться на дополнительные материалы.



В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



Эта пиктограмма означает теорему.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.

1 Элементы теории множеств

1.1 Понятие множества

Содержание понятия *множества* ясно интуитивно. У него нет точной формулировки. Например, Ф. А. Новиков пишет: «Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. Можно сказать, что множество – это любая определенная совокупность объектов» [35, с. 20]. Эти объекты в теории множеств называются *элементами*.

При аналитической записи множеств их элементы принято отделять один от другого запятыми. При этом всю последовательность элементов и запятых заключают в фигурные скобки. Например:

$$P = \{a, b, c, d\}. \tag{1.1}$$

Читается данное выражение следующим образом: «множество P состоит из четырех элементов вида a, b, c, d».

Из выражения (1.1) видно, что a является элементом множества P. Коротко это записывается в виде формулы:

$$a \in P, \tag{1.2}$$

где знак $\in$ обозначает *принадлежность элемента множеству*.

Читается запись (1.2) так: «a есть элемент множества P», либо – «элемент a принадлежит множеству P», либо – «a является элементом множества P». Если требуется указать, что множеству P принадлежит элемент b, то пишут аналогично: $b \in P$. Точно так же записывается утверждение о принадлежности множеству P элементов c и d: $c \in P$; $d \in P$.

Подобным образом указывается принадлежность множеству нескольких элементов. Например, согласно (1.1):

$$a, c, d \in P.$$

Читается: «множеству P принадлежат элементы a, c и d», либо – «a, c и d являются элементами множества P».

Если требуется указать, что те или иные элементы не принадлежат заданному множеству P, то применяется знак $\notin$. Например, среди всех элементов множества P, как показано в формуле (1.1), нет буквы m. Коротко это записывается следующим образом:

$$m \notin P.$$

Читается: «элемент m не принадлежит множеству P».

Нет в множестве P и таких элементов, как k и n. Это записывается так:

$$k, n \notin P.$$

Читается: «элементы k и n не принадлежат множеству P».

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. В конечном множестве содержится конечное число элементов, в бесконечном – бесконечное. Примером бесконечного множества является множество целых чисел.

Множество, содержащее точно один элемент, называется *синглетоном* (от английского *single* – одиночный), например:

$$P_1 = \{10\}, \quad P_2 = \{1\}, \quad P_3 = \{=\}, \quad P_4 = \{00\}, \quad P_5 = \{ddd\}.$$

Множество называется *пустым*, если в нём нет ни одного элемента. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$. Необходимо различать записи

$$B_1 = \varnothing \text{ и } B_2 = \{\varnothing\}.$$

Здесь B_1 – пустое множество, в нем нет элементов, а множество B_2 содержит один элемент, указанный в фигурных скобках.

Задают множества двумя основными способами [14, с. 5]:

а) прямым перечислением элементов (как показано выше), при этом *порядок записи элементов значения не имеет*. Например, множество (1.1) можно записать многими способами:

$$P = \{a,b,c,d\} = \{b,a,c,d\} = \{c,d,b,a\} = \{d,c,a,b\}$$

и т. д., всего 24 варианта;

б) описанием свойств элементов на основе правила, при помощи которого однозначно можно установить, является данный объект элементом заданного множества или не является (согласно [33, с. 6], в этом заключается интуитивный принцип абстракции):

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

где x – переменная, она может принимать любые значения, $P(x)$ – правило, указывающее, какие значения x принадлежат множеству A, например:

$$A = \{x \mid 0 \le x \le 7 \wedge x - \text{целое число}\},$$

где справа от вертикальной черты указано правило $P(x)$. Читается запись так: «множество A образуют все те значения x, которые больше нуля или равны ему, но не превышают 7 и являются целыми числами». Знак $\wedge$ обозначает союз И. Вместо него можно ставить точку, букву «и», а также знак & (амперсанд).

Если два множества состоят из одних и тех же элементов, то они называются *равными*. По [33, с. 5], в этом заключается интуитивный *принцип объёмности*, а согласно [25, с. 20], так формулируется *аксиома объёмности*, *экстенсиональности*. Например, множества C_1 и C_2, представленные в виде

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\}; \quad C_1 = \{2, 1, 4, 3\},$$

состоят из одних и тех же элементов, следовательно, они равны.

Число элементов, образующих множество, называется его *кардинальным числом*, или *мощностью*. Обозначается кардинальное число двумя вертикальными чертами, между которыми записывается множество [50]. Например:

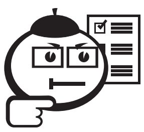
$$|C| = |\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5.$$

Два множества A и B называются *эквивалентными*, если $|A| = |B|$. Очевидно, что равные множества одновременно являются и эквивалентными.

Завершим параграф замечанием о повторяемости элементов множества. Элементы, входящие в множество, повторяться не могут. Каждый элемент должен входить в множество не более одного раза. Например, запись вида:

$$D = \{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6\}$$

является множеством, но состоит оно лишь из шести элементов, а не из девяти, и его кардинальное число равно 6.



Упражнения

1. Найдите кардинальное число множеств:

1) $A = \{x \mid 4 \le x \le 15 \wedge x - \text{целое число}\}$;

2) $A = \{x \mid x \le 100 \wedge x - \text{целое неотрицательное число}\}$;

3) $A = \{x \mid 10 \le x \le 50 \wedge x - \text{целое число}\}$.

2. Найдите кардинальное число множеств:

1) $A = \{1, 11, 2, 22, 3\}$;

2) $A = \{\varnothing, \varnothing\varnothing, \varnothing\varnothing\varnothing\varnothing\}$;

3) $A = \{1, +, 1, = 2\}$.

1.2 Понятие подмножества

Если все элементы множества A_1 являются элементами множества A, то множество A_1 называется *подмножеством* множества A. Пусть множество A состоит из четырёх элементов a,b,c,d, т. е.

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

Тогда примерами его подмножеств могут служить выражения:

$$A_1=\{b,c\};\quad A_2=\{a,d\};\quad A_3=\{d\};\quad A_4=\{a\};\quad A_5=\{b,c,d\}.$$

Множество $A_6=\{c,d,e\}$ не является подмножеством множества A, поскольку в множество A_6 входит элемент e, которого нет в множестве A.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество всех подмножеств множества A называется его *булеаном* [4; 14; 35; 40]. Например, булеан множества

$$A=\{1, 2, 3\}$$

имеет вид:

$$B(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\},$$

где $B(A)$ – обозначение булеана множества A.

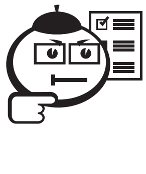
Очевидно, что в общем случае булеан $B(A)$ содержит $2^{|A|}$ элементов, то есть подмножеств множества A. Пустое множество и само множество A называются *несобственными* подмножествами. Все остальные $2^{|A|}-2$ подмножеств называются *собственными* подмножествами множества A.

Для обозначения принадлежности подмножества заданному множеству применяется знак включения вида $\subseteq$. Например:

$$\text{если } A_1=\{b,c\};\quad A=\{a,b,c,d\}, \text{ то } A_1\subseteq A.$$

Эта запись читается следующим образом: «A_1 является подмножеством множества A, так как все элементы A_1 являются элементами множества A».

Теоретико-множественные знаки «$\in$» и «$\subseteq$» необходимо строго различать. Первый из них задает отношение между элементами и множествами, а второй – между множествами.



Упражнения

1. Дано множество: $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества A:

1) $B=\{3, 4, 6, 7, 8\}$; 4) $B=\{\varnothing, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$;

2) $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$; 5) $B=\{6, 7, 8\}$;

3) $B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$; 6) $B=\{8\}$.

2. Сколько элементов содержит булеан множества $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

3. Булеан множества A содержит 64 элемента. Сколько существует подмножеств множества A, являющихся синглетонами?

4. Дано множество: $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

а. Сколько существует подмножеств множества A, содержащих только нечётные цифры?

б. Из булеана множества A удалили все те подмножества, в которых содержится хотя бы одна чётная цифра. Сколько элементов осталось в булеане?

в. Из булеана множества A удалили все синглетоны. Сколько элементов осталось?

. . . .

1.3 Объединение, пересечение и дополнение множеств

Для построения новых множеств на основе заданных применяются теоретико-множественные операции. Главными из них являются объединение, пересечение и дополнение [35].

Объединение множеств A и B – это множество C, содержащее все элементы множества A и все элементы множества B:

$$C = A \bigcup B,$$

где знак $\bigcup$ обозначает операцию объединения. Возможна и такая запись:

$$A \bigcup B=\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Читается: «объединение множеств A и B – это все те значения x, которые принадлежат множеству A или принадлежат множеству B».

Например, если к множествам

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \tag{1.3}$$

применить операцию объединения, то получим новое множество:

$$C=\{1, 2, 3, 4, 5\} \bigcup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Операция объединения может быть применена и к большему числу множеств, например, к четырём:

$$A\bigcup B\bigcup C\bigcup D=\{x\mid x\in A, \text{или } x\in B, \text{или } x\in C, \text{или } x\in D\}.$$

Для операции объединения справедливы следующие соотношения:

$$A\bigcup A=A;\quad A\bigcup\varnothing=A;\quad \text{если } A\subseteq B, \text{ то } A\bigcup B=B.$$

Пересечение множеств A и B – это такое множество C, в которое входят все элементы, принадлежащие одновременно обоим множествам A и B:

$$A\bigcap B=\{x\mid x\in A \text{ и } x\in B\},$$

где $\bigcap$ – знак, обозначающий операцию пересечения. Читается запись следующим образом: «пересечение множеств A и B – это все те значения x, которые принадлежат и множеству A, и множеству B». Найдём, например, пересечение множеств (1.3):

$$C=A\bigcap B=\{1,2,3,4,5\}\bigcap\{3,4,5,6,7,8\}=\{3,4,5\}.$$

Операция пересечения применима и к большему числу множеств:

$$A\bigcap B\bigcap C\bigcap D=\{x\mid x\in A \text{ и } x\in B \text{ и } x\in C \text{ и } x\in D\}.$$

Для операции пересечения справедливы следующие соотношения:

$$A\bigcap A=A;\quad A\bigcap\varnothing=\varnothing;\quad \text{если } A\subseteq B, \text{ то } A\bigcap B=A.$$

Операции объединения и пересечения коммутативны:

$$A\bigcup B=B\bigcup A;\quad A\bigcap B=B\bigcap A;$$

и ассоциативны:

$$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)=A\bigcup B\bigcup C;$$

$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)=A\bigcap B\bigcap C.$$

Кроме того, имеет место дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C),$$

а также дистрибутивность объединения относительно пересечения:

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$$

Чтобы в записях множеств исключить лишние скобки, в теории множеств принято: сначала выполняются операции пересечения, а затем – объединения, если выражение представлено в виде объединения пересечений. Например:

$$(A\bigcap B)\bigcup(C\bigcap D)=A\bigcap B\bigcup C\bigcap D.$$

Скобки применяются лишь при необходимости изменения порядка выполнения операций, например:

$$(A\bigcup B)\bigcap(C\bigcup D).$$

Здесь первыми выполняются операции в скобках, т. е. объединения, а затем – пересечения.

Третья операция из основных – дополнение. Но прежде чем её рассматривать, необходимо ввести понятие универсального множества (*универсума*, согласно [35; 40]).

Универсальным называется множество U, все элементы которого участвуют в данном рассуждении [20; 433]. Обычно множество U считается заданным. Пусть в универсуме дано множество A. *Дополнение* множества A – это новое множество $\overline{A}$, все элементы которого принадлежат универсуму U, но ни один из них не принадлежит множеству A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A \text{ и } x \in U\},$$

где чертой над буквой обозначена операция дополнения (произносится «не A»): U – универсальное множество.

Читается: «множество $\overline{A}$ – это все те значения x, которые не принадлежат множеству A, но являются элементами множества U».

Допустим, что универсальное множество задано десятичными цифрами:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

и пусть заданы множества

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Тогда их дополнения представятся в виде

$$\overline{A} = \{0, 6, 7, 8, 9\};$$

$$\overline{B} = \{0, 1, 2, 9\}.$$

В теоретико-множественных преобразованиях широко применяются следующие тождества:

1) законы поглощения:

$$A \bigcup A \bigcap B = A; \quad A \bigcap (A \bigcup B) = A;$$

2) законы склеивания:

$$A \bigcap B \bigcup A \bigcap \overline{B} = A; \quad (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \overline{B}) = A;$$

3) теорема 1 де Моргана: дополнение объединения есть пересечение дополнений:

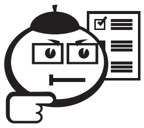
$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B};$$

4) теорема 2 де Моргана: дополнение пересечения есть объединение дополнений:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Кроме того, применяются тождества вида

$$A \cup U = U; \quad A \cap U = A; \quad \overline{\varnothing} = U; \quad \overline{U} = \varnothing; \quad \overline{\overline{A}} = A.$$



Упражнения

1. Найдите элементы множества:

$$P_1 = A \cap \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap C,$$

если $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и известно, что

1) $A = \{0, 1, 2, 5, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 9\}$; $C = \{0, 1, 4, 5, 7\}$;

2) $A = \{0, 2, 3, 5, 7\}$; $B = \{0, 6, 7, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 7\}$;

3) $A = \{1, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6\}$; $C = \{0, 1, 3, 6, 9\}$;

4) $A = \{0, 1, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 9\}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$;

5) $A = \{1, 4, 5, 8\}$; $B = \{2, 4, 5, 8, 9\}$; $C = \{0, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

2. Даны множества:

$$A = \{0, 1, 3, 5, 6, 7\}; \quad B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}; \quad C = \{1, 3, 6, 7\}.$$

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Найдите элементы множеств:

1) $P_1 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap C$;

2) $P_2 = \overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap \overline{C}$;

3) $P_3 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cap C$.

1.4 Разность и симметрическая разность множеств

В теории множеств кроме основных трёх операций объединения, пересечения и дополнения применяются ещё две операции, известные под названиями разности множеств и симметрической разности.

Разность множеств A и B – это множество C, включающее все те элементы множества A, которых нет в множестве B:

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\},$$

где наклонная черта обозначает операцию разности множеств. Иногда применяется знак арифметического вычитания – минус [51].

Разность множеств A и B можно рассматривать как пересечение множества A с дополнением множества B:

$$A \setminus B = A \bigcap \overline{B}.$$

Например, разность множеств (1.3) имеет вид:

$$C = A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, содержащее все те элементы множества A, которых нет в множестве B, а также все те элементы множества B, которых нет в множестве A:

$$C = A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B, \text{или } x \in B \text{ и } x \notin A\},$$

где знак $\oplus$ обозначает операцию симметрической разности.

Через операции объединения пересечения и дополнения симметрическая разность выражается следующим образом:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = A \bigcap \overline{B} \bigcup \overline{A} \bigcap B.$$

Проиллюстрируем операцию симметрической разности, воспользовавшись примерами множеств (1.3):

$$C = A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \oplus \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 6, 7, 8\}.$$

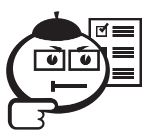
Для симметрической разности справедливы тождества:

$A \oplus U = \overline{A}$, так как $A \oplus U = A \bigcap \overline{U} \bigcup \overline{A} \bigcap U = A \bigcap \varnothing \bigcup \overline{A} = \overline{A}$;

$A \oplus A = \varnothing$, так как $A \oplus A = A \bigcap \overline{A} \bigcup \overline{A} \bigcap A = \varnothing$;

$A \bigcup B = A \oplus B \oplus (A \bigcap B)$;

$A \bigcup B = A \oplus B$, если $A \bigcap B = \varnothing$.



Упражнения

1. Найдите элементы множества:

$$P = A \bigcap \overline{B} \bigcap C \oplus \overline{A} \bigcap B \bigcap \overline{C} \oplus A \bigcap C,$$

если $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и известно, что

1) $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{0, 2, 3, 4, 8\}$; $C = \{0, 1, 3, 5, 7\}$;

2) $A = \{2, 3, 6, 7\}$; $B = \{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $C = \{1, 2, 4, 7\}$;

3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 3, 5, 6\}$; $C = \{0, 2, 3, 7, 9\}$.

2. Даны множества:

$A = \{1, 2, 5, 6, 7\}$; $B = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$; $C = \{1, 5, 6, 9\}$;

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Найдите элементы множеств:

1) $P_1 = \overline{A} \cap \overline{B} \oplus \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \oplus \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;

2) $P_2 = B \cap C \oplus \overline{B} \cap \overline{C} \oplus A \cap \overline{C}$;

3) $P_3 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \oplus A \cap B \cap \overline{C} \oplus \overline{A} \cap B \cap C$.

. . . .

1.5 Диаграммы Венна

Диаграммы Венна, называемые в литературе также диаграммами Эйлера – Венна [14], применяются для повышения наглядности при выполнении операций над множествами. Множества на диаграммах Венна обычно изображаются кругами, но можно и другими замкнутыми плоскими фигурами, необязательно геометрически правильной формы, а универсальные множества – прямоугольниками. На рисунке 1.1 приведена диаграмма Венна для множеств вида

$$A = \{2, 4, 6, 8\}; \quad B = \{1, 2, 3, 6, 9\}.$$

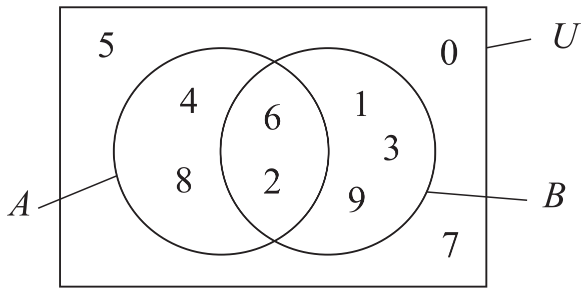


Рис. 1.1

Универсальное множества на рисунке 1.1 представлено десятичными цифрами. Из диаграммы видно, что пересечение множеств A и B образует два элемента. Это цифры 2 и 6:

$$A \cap B = \{2, 6\}.$$

Они находятся в той части диаграммы, где круги пересекаются.

Элементы, входящие в объединение множеств, расположены в области, ограниченной обоими кругами, следовательно:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

Элементы 4 и 8 относятся к множеству A, но не принадлежат множеству B. Следовательно, эти две цифры являются элементами разности множеств:

$$A \setminus B = \{4, 8\}.$$

Аналогично находим разность вида

$$B \setminus A = \{1, 3, 9\}.$$

Симметрическая разность определяется точно так же:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{4, 8\} \cup \{1, 3, 9\} = \{1, 3, 4, 8, 9\}.$$

На рисунке 1.2 представлена диаграмма Венна для множеств A, B и C:

$$A = \{0, 3, 5\}; \quad B = \{0, 1, 2, 3, 7\}; \quad C = \{3, 6, 7, 9\}, \qquad (1.4)$$

для которых универсальным является множество десятичных цифр.

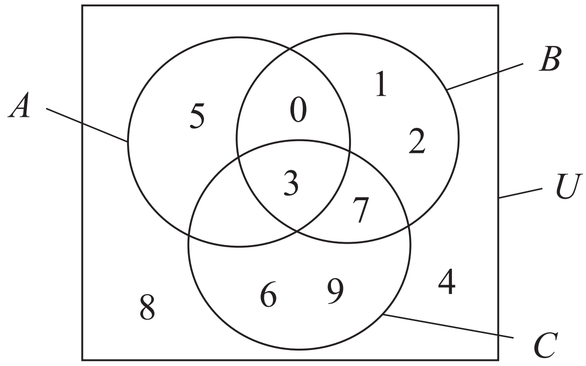


Рис. 1.2

Рассмотрим несколько примеров на основе множеств (1.4).

Пример 1.1

Найдём элементы множества D, заданного формулой

$$D = A \cap B \cup A \cap C.$$

Находим на диаграмме (рис. 1.2) области $A \cap B$ и $A \cap C$ и записываем находящиеся в них элементы:

$$A \cap B = \{0, 3\}; \quad A \cap C = \{3\}.$$

Следовательно,

$$D = \{0, 3\} \cup \{3\} = \{0, 3\}.$$

Пример 1.2

Найти элементы множества

$$D = (A \setminus B) \cap C \cup [A \setminus (A \cap C)].$$

Элементы множества D можно найти и без диаграммы, если для каждого множества и соответствующего дополнения указать, из каких они состоят элементов. Например, сначала можно найти элементы множества $(A \setminus B)$. Для этого достаточно записать множество A и удалить из него элементы множества B. Получится множество вида $\{5\}$. В множестве C элемента 5 нет, следовательно, пересечение $(A \setminus B)\bigcap C$ пусто, и т. д. Однако при помощи диаграммы Венна выполнить эти операции можно с гораздо меньшими трудозатратами. Сначала заданное выражение упростим:

$$D = A\bigcap \overline{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap \overline{A \bigcap C} = A\bigcap \overline{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap (\overline{A} \bigcup \overline{C}) =$$

$$= A\bigcap \overline{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap \overline{A} \bigcup A \bigcap \overline{C}) = A\bigcap \overline{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap \overline{C}.$$

Затем переходим к диаграмме. Согласно последней формуле отыскиваем на диаграмме (рис. 1.2) области $A \bigcap \overline{B} \bigcap C$ и $A \bigcap \overline{C}$ и записываем принадлежащие им элементы:

$$A \bigcap \overline{B} \bigcap C = \varnothing; \quad A \bigcap \overline{C} = \{0,5\}.$$

Таким образом, искомое множество D имеет вид:

$$D = \varnothing \bigcup \{0, 5\} = \{0, 5\}.$$

. . . .

. . . . Пример 1.3 . . . .

Найти элементы множества

$$D = A\bigcap \overline{B} \bigcap C \bigcup \overline{A \bigcap B}.$$

В предыдущем примере показано, что на диаграмме область, описываемая формулой вида $A\bigcap \overline{B} \bigcap C$, пуста. Тогда

$$D = \varnothing \bigcup \overline{A \bigcap B} = \overline{A \bigcap B}.$$

Множество $A\bigcap B$ на диаграмме (рис. 1.2) содержит элементы 0 и 3. Следовательно, его дополнение образуют все элементы универсального множества, за исключением цифр 0 и 3.

Таким образом, искомое множество имеет вид

$$D = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

. . . .

. . . . Пример 1.4 . . . .

Найти элементы дополнения множества

$$D = (A \bigcup \overline{B}) \bigcap (\overline{A} \bigcup B \bigcup C).$$

Сначала находим дополнение по теореме де Моргана:

$$\overline{D} = \overline{(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)} =$$

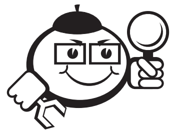
$$= \overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} = \overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

После этого обращаемся к диаграмме Венна (рис. 1.2):

$$\overline{A} \cap B = \{1, 2, 7\};\ A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{5\}.$$

Объединив эти множества, получаем искомое дополнение множества D:

$$\overline{D} = \{1, 2, 5, 7\}.$$



Пример 1.5

Найти дополнение $\overline{D}$ множества

$$D = A \cap B \cup (B \oplus C).$$

В данном случае следует сначала найти элементы множества D. Согласно диаграмме (рис. 1.2), множество $A \cap B$ состоит из элементов 0 и 3. Симметрическую разность множеств B и C сначала представим в виде:

$$B \oplus C = B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C.$$

По диаграмме находим:

$$B \cap \overline{C} = \{0, 1, 2\};\ \overline{B} \cap C = \{6, 9\}.$$

Объединение этих множеств есть симметрическая разность $B \oplus C$:

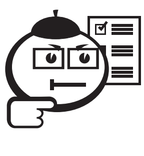
$$B \oplus C = \{0, 1, 2, 6, 9\}.$$

Объединив элементы множеств $A \cap B$ и $B \oplus C$, получаем множество D:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 6, 9\}.$$

Находим разность $U \setminus D$ и в результате получаем искомое дополнение $\overline{D}$:

$$\overline{D} = \{4, 5, 7, 8\}.$$



Упражнения

1. Найдите элементы множеств (рис. 1.1):

1) $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; 2) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$;

3) $\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap B$.

2. Найдите элементы множеств (рис. 1.2):

1) $\overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap C$; 2) $(\overline{A} \cup C) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup C)$;

3) $\overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap \overline{B} \cap C$; 4) $(\overline{A} \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C)$.

1.6 Декартово произведение множеств

Если взять из множества

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

элемент a_i и записать справа от него элемент b_j, принадлежащий множеству

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

то получим *упорядоченную* пару элементов a_i и b_j, записываемую в виде (a_i, b_j), где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Упорядоченную пару необходимо отличать от обычной, то есть неупорядоченной пары: в неупорядоченной паре порядок записи элементов не имеет значения, в то время как в упорядоченной паре при смене последовательности записи элементов получается другая пара.

Множество всех упорядоченных пар вида (a_i, b_j) получило название *декартова произведения* множеств A и B [14; 18; 30]. В существующих литературных источниках встречается также название *прямое произведение* [35; 40].

Для обозначения декартова произведения принят знак арифметического умножения «×».

Записывается декартово произведение следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Читается: «декартово произведение множеств A и B – это множество упорядоченных пар (x, y), где x обозначает элемент, принадлежащий множеству A, y – элемент, принадлежащий множеству B».

Очевидно, что операция декартова произведения некоммутативна, т. е. в общем случае

$$A \times B \neq B \times A.$$

Поясним это неравенство на примере следующих двух непересекающихся множеств:

$$A = \{1, 2, 3, 4\};\ B = \{a, b, c\}.$$

Тогда

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c),$$
$$(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\};$$
$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2),$$
$$(a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}.$$

Из этих двух выражений видно, что в результате перестановки знаков в круглых скобках множества $A \times B$ получается новое множество $B \times A$, все элементы которого отличаются от элементов множества $A \times B$, т. е. множества $A \times B$ и $B \times A$ не пересекаются.

Кардинальное число декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|,$$

где точкой, поставленной между символами $|A|$ и $|B|$, обозначена операция арифметического умножения. Например, пусть дано:

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Согласно этим записям:

$$|A| = 3; \quad |B| = 5; \quad |A \times B| = 3 \cdot 5 = 15; \quad |B \times A| = 5 \cdot 3 = 15.$$

В случае бóльшего числа множеств кардинальное число их декартова произведения определяется аналогично: если $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ – кардинальные числа заданных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|,$$

то есть, чтобы найти число элементов декартова произведения n множеств, достаточно перемножить их кардинальные числа.

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$$

благодаря чему декартово произведение множеств можно записывать без скобок, но сами множества записываются в строгом порядке.

Множества, входящие в декартово произведение, могут быть равными. Если в произведении

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

принять

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A,$$

то получим

$$M = A \times A \times \ldots \times A = A^n,$$

где A^n – *степень* множества A. Элементы множества A^n называют *кортежами* длины n.

Например, пусть задано множество $A = \{a, b, c\}$. Тогда:

если $n = 1$, то $A^1 = \{(a), (b), (c)\}$; $|A^1| = 3^1 = 3$;

если $n = 2$, то $A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), \ldots (c, b), (c, c)\}$; $|A^2| = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$;

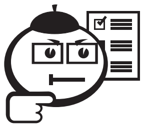
если $n = 3$, то $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), \ldots, (c, c, c)\}$; $|A^3| = 3^3 = 27$;

если $n = 4$, то $A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), \ldots, (c, c, c, c)\}$; $|A^4| = 3^4 = 81$ и т. д.

Множество A^1 содержит три кортежа, каждый из которых является одноэлементным и имеет длину, равную единице. Множество A^2 называется *квадратом множества A*. В нём содержится 9 кортежей длины 2. Множество A^3 состоит из 27 кортежей длины 3 и т. д.

В общем случае справедливо соотношение:

$$|A^n| = |A|^n.$$



Упражнения

1. Сколько элементов в декартовых произведениях следующих множеств?

1) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{3, 4, 5\}$; 4) $A = \{\varnothing\}$; $B = \{\varnothing, 0, 1, 2, 6, 9\}$;
2) $A = \{2\}$; $B = \{0, 1, 2, 6, 9\}$; 5) $A = \varnothing$; $B = \{3, 4, 5, 8\}$;
3) $A = \{0, 00, 000\}$; $B = \{3, 4\}$;6)$A = \{\varnothing, 0\}$; $B = \{00, 10, 2, 6, 9\}$.

2. Сколько элементов содержит пересечение декартовых произведений $A \times B$ и $B \times A$ следующих множеств?

1) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{3, 4, 5\}$; 3) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{0, 1, 3\}$;
2) $A = \{2\}$; $B = \{0, 1, 2, 6, 9\}$; 4) $A = \{\varnothing\}$; $B = \{\varnothing, 0, 1, 2, 6, 9\}$.

3. Найдите n и $|A|$, если известно, что

1) $|A^n| = 128$; 2) $|A^n| = 49$; 3) $|A^n| = 243$; 4) $|A^n| = 125$.

1.7 Заключительные замечания

На этом завершим первую главу пособия. В ней представлены минимально необходимые, начальные сведения из теории множеств, созданной немецким математиком Георгом Кантором. К ним относятся: понятие множества и основные операции, такие как объединение, пересечение и дополнение, а также разность, симметрическая разность и декартово произведение множеств. При этом объекты с бесконечным числом составляющих не рассматриваются, всё внимание сосредоточено только на конечных множествах, свойства которых хорошо согласуются с нашей интуицией, взращённой на представлениях о дискретности и конечности всех величин, с которыми приходится иметь дело в практической деятельности.

Не включена в книгу и теория нечётких множеств, созданная в 60-х гг. прошлого века американским математиком Лотфи Заде, получившая распространение не только в теоретико-множественных построениях, но и в теории нечёткого логического вывода [26; 31].

Представленных в пособии начальных сведений о чётких конечных множествах вполне достаточно для освоения дальнейшего материала данной книги, где не требуется учитывать особенности бесконечных и нечётких множеств. При необходимости же всегда можно обратиться к другим учебным пособиям, в которых теоретико-множественные аспекты рассматриваются более подробно. Примерами могут служить публикации [5; 24; 26; 29; 31; 32; 34; 35; 38; 45; 55; 56], где можно найти сведения не только о конечных, но и бесконечных, а также нечётких множествах.

2 Элементы комбинаторики

2.1 Вводные замечания

Впервые термин «комбинаторный» появился в работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной 1666 г. немецким языковедом, философом и математиком Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716). Именно с этого времени комбинаторику стали рассматривать как самостоятельное направление в науке [42, с. 140], хотя многие комбинаторные задачи были сформулированы ещё в древности.

В литературе толкование различными авторами термина «комбинаторика» является почти одинаковым:

«Комбинаторика – раздел дискретной математики, изучающий всевозможные сочетания и расположения предметов» [36, с. 280].

«Комбинаторика – [от лат. *combinare* – соединять, сочетать] раздел математики, изучающий приёмы нахождения числа различных соединений (комбинаций): перестановок, размещений, сочетаний, составляемых при определённых условиях из данных предметов» [43, с. 311].

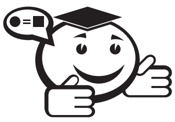
«Комбинаторика – раздел математики, в котором рассматриваются различного вида совокупности (соединения) образов из элементов некоторого множества M, содержащего n различных элементов. Виды соединений: размещения, перестановки, сочетания» [41, с. 219].

Исходным в комбинаторике является понятие *выборки* как набора m элементов из n заданных, причем наборы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными, с повторениями элементов и без повторений [33, с. 131]. Понятие выборки не требует уточнения, вполне достаточно пояснения близкими по смыслу словами, такими как расстановки, комбинации, соединения.

Согласно [33, с. 130], в комбинаторике различают две задачи. Одна из них – *пересчёт*, другая – *перечисление*. Если требуется ответить на вопрос «Сколько?», то это задача пересчёта. Например: «Сколько существует пятизначных двоичных чисел, в каждом из которых содержится точно два нуля и каждое число начинается с единицы?». Ответом является число 6. Если же требуется найти все выборки, удовлетворяющие заданным условиям, то это будет задача перечисления. Например: «Найдите все пятизначные двоичные числа, в каждом из которых содержится точно два нуля и каждое число начинается с единицы?». Ответом является не число 6, как в предыдущей формулировке этой задачи, а перечень вида: 11100, 11010, 11001, 10110, 10101, 10011.

В настоящее время комбинаторика в той или иной мере применяется во многих науках. Можно даже утверждать, что очень непросто найти научное направление, где бы комбинаторные понятия совсем не применялись. В связи с этим комбинаторика включена в данное пособие как важнейшая составляющая курса дискретной математики, имеющая большое прикладное значение.

2.2 Факториал



Факториал *– это функция аргумента n, представляющая собой произведение всех натуральных чисел от* 1 *до n без пропусков, где каждое число встречается точно один раз:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)\,n.$$

Название функции, согласно [43], произошло от лат. *factor* (делающий, производящий), а согласно [42, с. 310] – от англ. *factor*, что в переводе обозначает «сомножитель».

Переменная n может принимать любые значения из натурального ряда, но не всякое целое число может быть значением функции $n!$.

Например, число 100 невозможно представить в виде произведения чисел натурального ряда от 1 до n без пропусков и не содержащего повторяющихся чисел, поэтому оно не может быть значением функции $n!$.

Запишем функцию $n!$ в виде

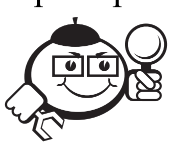
$$f = n! = (n-1)!\,n.$$

При $n = 1$ имеем:

$$f = (1-1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 = 1!,$$

откуда следует, что $0! = 1$.

Рассмотрим несколько примеров.



Пример 2.1

Записать со знаком факториала:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6.$$

В заданном произведении число 5 встречается два раза. Кроме того, в записи отсутствует единица. Добавим её. Тогда получим:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 6! \cdot 5.$$

Пример 2.2

Записать со знаком факториала: $1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$.

Умножим и разделим на 2 и 4 все выражение:

$$1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot4}.$$

После сокращения на 8 находим ответ:

$$1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=7!.$$

Пример 2.3

Упростить:

$$N=\frac{k!+(k-1)!}{(k-2)!}. \tag{2.1}$$

Представим выражение (2.1) в виде

$$N=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k-1)k+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)}.$$

В числителе вынесем за скобки $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)$:

$$N=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)\left[(k-1)k+(k-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)}.$$

После сокращения получаем ответ:

$$N=(k-1)k+k-1=k^2-1.$$

Пример 2.4

Упростить:

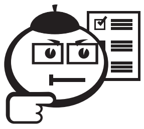
$$K=\frac{n!^2+(n-1)!(n-2)!}{(n-2)!^2}.$$

В числителе вынесем за скобки выражение

$$1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2).$$

Сократим его со знаменателем, тогда получим:

$$K=n^4-2n^3+n^2+n-1.$$



Упражнения

1. Запишите произведения с использованием знака факториала:

1) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$; 3) $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)$;

2) $1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$; 4) $1\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12$.

2. Вычислите при $n = 31$:

1) $\dfrac{3(n-1)!+4n!}{2(3+4n)(n-2)!}$; 2) $\dfrac{n!(n-1)!(n+1)!n}{n!^3}$.

3. Найдите значение функции при $n = 2$:

1) $f = (n-2)!(n-1)n^3$; 2) $f = (n-3)!(n-2)(n-1)n$.

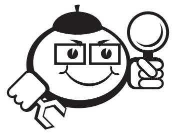
4. Какими цифрами не может оканчиваться число $n!$?

5. Какими цифрами может оканчиваться число $n!$ при $n > 3$?

2.3 Правило произведения в комбинаторике

Правило произведения является основным в комбинаторике. Его формулировка: если один элемент из некоторого множества может быть выбран n способами, а второй после него – m способами, то выбор того и другого элементов в *заданном порядке* может быть осуществлен N способами:

$$N = nm.$$

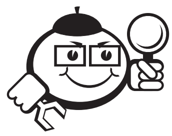


Пример 2.5

Сколько существует двузначных чисел шестеричной системы счисления, в каждом из которых нет повторов цифр и нет нулей?

Запишем шестеричные цифры, исключив нуль: 1, 2, 3, 4, 5. Одну цифру из них можно выбрать $n = 5$ способами. Так как повторы запрещены, то вторую цифру можно выбрать $m = 4$ способами. Следовательно, выбор двух цифр с учётом порядка их записи возможен $5\cdot4 = 20$ способами. Это числа:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.



Пример 2.6

В урне пять шаров, пронумерованных шестеричными цифрами вида 1, 2, 3, 4, 5. Все номера разные. Наугад вынимают один шар и записывают его номер. Шар возвращают в урну и наугад снова выбирают один шар и его номер записывают справа от первой цифры. Получится двухразрядное число. Сколько возможно таких различных чисел?

Очевидно, что задача сводится к вопросу о том, сколько существует двухразрядных чисел, которые можно составить из цифр множества {1, 2, 3, 4, 5} при условии, что повторы цифр разрешены. Так как шаров 5, то на первое место можно поставить одну из пяти цифр. Следовательно, $n = 5$. Выбор второй цифры возможен также пятью способами. Таким образом, $m = 5$. Тогда искомое число $nm = 5 \cdot 5 = 25$. Среди всех этих 25 выборок (в отличие от предыдущего примера) существуют пары с одинаковыми цифрами.

Пример 2.7

Условие предыдущего примера, но шары извлекают три раза. Сколько получится трехзначных чисел?

На первом месте может стоять одна цифра из пяти, на втором – также одна из пяти, и на третьем – одна из пяти. Следовательно, число выборок равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Пример 2.8

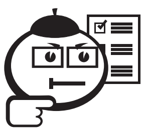
Сколько существует трехразрядных чисел семеричной системы счисления, не начинающихся с нуля? Повторы цифр в числах возможны.

В семеричной системе счисления семь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Первую цифру можно выбрать шестью способами, поскольку нуль не используем: по условию его запрещено ставить на место старшего разряда. Вторая цифра может быть любой, в том числе и нулем, следовательно, для её выбора существует 7 вариантов. То же самое относится и к цифре младшего разряда. Искомое число равно $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

Пример 2.9

Сколько существует четырёхзначных симметричных чисел восьмеричной системы счисления, то есть таких чисел, которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево, например: 2332, 5555, 1001 и т. д.? С нуля числа не могут начинаться.

Первую цифру можно выбрать 7 способами, так как согласно условию с нуля четырёхзначные числа начинаться не могут. Вторую цифру можно выбрать 8 способами, поскольку теперь можно использовать и нуль. Для выбора третьей и четвёртой цифр нет вариантов для выбора. Они должны повторять первые две цифры. Таким образом, в соответствии с правилом произведения всего существует $7 \cdot 8 = 56$ искомых чисел.



Упражнения

1. Сколько 3-значных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 6, если повторы возможны?

2. Сколько 5-значных чисел можно образовать из цифр 2, 8, 9, если повторы возможны?

3. Из всех возможных пятизначных десятичных чисел удалили все числа, в которые входит хотя бы одна из цифр 0, 1, 2, 6, 7. Сколько чисел осталось? Повторы цифр возможны.

4. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр не повторяется в числе более одного раза? С нуля числа не начинаются.

5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, если цифра младшего разряда каждого числа является четной, старшего – нечетной, а на среднюю ограничений нет?

6. Сколько существует четырёхзначных десятичных чисел, которые делятся на 5 без остатка? С нуля числа не начинаются. Повторы цифр возможны.

7. Сколько существует пятиразрядных симметричных десятичных чисел (т. е. одинаково читающихся как справа налево, так и слева направо, например, 39793; 68286)? С нуля числа не начинаются.

2.4 Правило суммы в комбинаторике

Пусть даны непустые множества P_1 и P_2. Выясним, сколько элементов содержится в множестве $P_1 \cup P_2$. На первый взгляд задача представляется слишком простой, даже примитивной. Так оно и есть, но только при $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. В этом случае

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2|,$$

т. е. если один элемент множества P_1 может быть выбран $|P_1|$ способами, а элемент множества P_2 – $|P_2|$ способами, то выбор «либо элемент множества P_1, либо элемент множества P_2» может быть выполнен $|P_1| + |P_2|$ способами. В этом состоит *правило суммы* для двух непересекающихся множеств [8, с. 250].

Правило суммы для n попарно непересекающихся множеств имеет вид:

$$|P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n| = |P_1| + |P_2| + \ldots + |P_n|,$$

где $P_i \cap P_j = \varnothing$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$.

Если же $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$, то правило суммы представляется более сложной формулой:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

В [33, с. 140] эту формулу называют *формулой включений и исключений*, а в [51, с. 32] введён термин «принцип включения-исключения». В [42, с. 140] ее рассматривают в качестве частного случая формулы перекрытий.

В случае трех множеств формула для правила суммы ещё усложняется:

$$\begin{aligned} |P_1 \cup P_2 \cup P_3| &= |P_1 \cup P_2| + |P_3| - |(P_1 \cup P_2) \cap P_3| = \\ &= |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_3 \cup P_2 \cap P_3| = \\ &= |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2| + |P_3| - (|P_1 \cap P_3| + |P_2 \cap P_3| - |P_1 \cap P_2 \cap P_3|) = \\ &= |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В случае n множеств правило суммы имеет вид:

$$\begin{aligned} |P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n| &= |P_1| + |P_2| + \ldots + |P_n| - (|P_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_3| + \\ &\ldots + |P_{n-1} \cap P_n|) + (|P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_4| + \\ &\ldots + |P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n|) - \ldots + (-1)^{n-1} |P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n|. \end{aligned}$$

Пример 2.10

Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка – 3 человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка? (Задача из [17, с. 15].)

Обозначим: $|P_1|$ – число студентов, знающих английский язык; $|P_2|$ – знающих немецкий язык; $|P_3|$ – знающих французский язык. Тогда

$$|P_1| = 28; \quad |P_2| = 30; \quad |P_3| = 42.$$

Согласно условию:

$|P_1 \cap P_2| = 8$ – число студентов, знающих английский и немецкий языки;

$|P_1 \cap P_3| = 10$ – число студентов, знающих два языка – английский и французский;

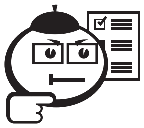
$|P_2 \cap P_3| = 5$ – число студентов, знающих немецкий и французский языки;

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = 3$ – число студентов, знающих три языка.

По правилу суммы для трёх множеств:

$$|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, знают хотя бы один иностранный язык 80 студентов, следовательно, ни одного иностранного языка не знают 20 человек.



Упражнения

1. 32 учащихся сдавали экзамен по физике и химии. По две отличные оценки получили 10 человек. На «отлично» физику сдали 14 человек, химию – 18. Сколько учащихся не получили ни одной отличной оценки?

2. 10 туристов взяли с собой спички, 15 – зажигалки. Ни спичек, ни зажигалок не взяли 8 человек. Всего в отряде 30 человек. Сколько человек взяли и спички, и зажигалки?

3. Из 25 учащихся физический кружок посещают 12 человек. Из них 4 человека посещают еще и химический кружок. Ни физический, ни химический кружок не посещают 6 человек. Сколько человек посещают только химический кружок?

2.5 Перестановки без повторений

Постановка задачи. Пусть дано множество

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Запишем его элементы в некотором порядке – получим упорядоченную последовательность длины n. Если в ней некоторые элементы переставить местами, то получим другую последовательность длины n. Такие последовательности, отличающиеся одна от другой только порядком следования n элементов, называются *перестановками без повторений*. (В [20] применяется термин «расстановки».) Требуется определить, сколько всего существует таких последовательностей?

Формулу для числа перестановок без повторений можно получить на основе правила произведения. Составим какую-либо перестановку последовательным выбором элементов из множества A. Выбор первого элемента возможен n вариантами. После его удаления в множестве останется $n-1$ элементов. Следовательно, выбор второго элемента возможен $n-1$ способами, третий – $n-2$ способами и т. д. Последний элемент выбирается единственным способом. По правилу произведения получаем:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!,$$

где P_n – число перестановок из n элементов без повторений.

Таким образом, формула для числа перестановок из n элементов без повторений имеет вид:

$$P_n = n!. \tag{2.3}$$

Пример 2.11

Сколько 4-разрядных чисел, не содержащих повторяющихся цифр, можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3, 4\}$? Перечислить их.

На место старшего разряда цифру из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ можно выбрать четырьмя вариантами, из оставшихся – тремя, затем – двумя, после чего останется одна цифра:

$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24,$$

то есть всего четырёхзначных чисел, состоящих из цифр множества $\{1, 2, 3, 4\}$, и не содержащих повторов, существует 24. Это числа:

1234, 1243, 1324, 1423, 1432, 1342, 2134, 2143, 2314, 2413, 2341, 2431,
3124, 3142, 3214, 3412, 3421, 3241, 4132, 4123, 4312, 4213, 4321, 4231.

Пример 2.12

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове *автобус*, если под словом понимать любую последовательность букв, даже бессмысленную, например, *абвосту*, *вбтсаоу*, *увтсбоа* и т. д.?

В слове *автобус* все буквы разные, следовательно, по формуле (2.3) для числа перестановок без повторений получаем:

$$7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040.$$

Пример 2.13

Сколько новых четырёхзначных чисел, не начинающихся с нуля, можно образовать за счёт перестановок цифр в числе 2630?

В заданном числе 4 цифры. Следовательно, по формуле числá перестановок без повторений можно получить $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ перестановки, из них 23 перестановки – новые числа. Но не все они являются искомыми. Из них необходимо удалить все числа, начинающиеся с нуля, поскольку такие числа, как 0236, 0623 и др. нельзя считать четырёхзначными. Если нуль не учитывать, то из цифр множества $\{2, 3, 6\}$ можно образовать $3! = 6$ трехзначных чисел без повторов. Столько существует бесповторных четырёхзначных чисел, начинающихся с нуля. Удалим их из найденных 23 чисел. Тогда ответ к сформулированной задаче примет вид: $23 - 6 = 17$.

Эта задача легко решается и без обращения к формуле числа перестановок, вполне достаточно только правила произведения.

Так как нулю запрещается занимать место старшего разряда, то выбор первой цифры возможен тремя способами. И для второй цифры существует три варианта выбора – за счёт возврата нуля. На третье место можно выбрать одну цифру из двух. Оставшаяся цифра займёт место младшего разряда. Таким образом, по правилу произведения количество искомых чисел равно:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 17.$$

Упражнения

1. Сколько существует 10-значных десятичных чисел, если каждая цифра входит в число точно один раз и если каждое число начинается с упорядоченной последовательности 298 и оканчивается упорядоченной последовательностью 345?

2. Сколько новых чисел, не начинающихся с нуля, можно получить, переставляя цифры в числе 12340?

3. Сколько существует способов записи выражения

$$A + b + c + d + e + f$$

(здесь плюс – знак арифметического суммирования), если учесть коммутативность операции арифметического сложения?

4. Буквенно-цифровой код составляют следующим образом: сначала в некотором порядке записывают четыре буквы a, b, c, d, затем справа приписывают также в некотором порядке три цифры 1, 2, 3. Сколько всего существует таких кодов?

2.6 Перестановки с повторениями

Постановка задачи. Последовательность состоит из n элементов. В ней содержится n_1 неразличимых между собой элементов вида a, n_2 элементов вида b, …, n_k элементов вида x. Очевидно, что

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Одна из последовательностей, содержащая n элементов, имеет вид

$$\underbrace{a \quad a \quad a \quad \ldots \quad a}_{n_1 \text{ элементов}} \quad \underbrace{b \quad b \quad b \quad \ldots \quad b}_{n_2 \text{ элементов}} \ldots \underbrace{x \quad x \quad x \quad \ldots \quad x}_{n_k \text{ элементов}}.$$

Если некоторые буквы переставить местами, то получится другая последовательность. Сколько существует таких последовательностей, которые отличаются одна от другой только порядком расположения элементов?

Число последовательностей равно $n!$, если все n элементов считать различными. Но среди них $n_1!$ перестановок неразличимы. Они состоят из повторов буквы a. Неразличимы и $n_2!$ перестановок. В них входит только буква b. И так далее до буквы x. Следовательно,

$$\dot{P}_n = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2! \ \ldots \ n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2! \ \ldots \ n_k!}, \tag{2.4}$$

где точка над знаком P_n обозначает перестановки с повторениями, то есть говорит о том, что в перестановках есть повторяющиеся элементы.

Пример 2.14

Сколько пятибуквенных слов можно составить из двух букв *а* и *б*, если в каждом слове содержится точно три буквы *а*?

По условию: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n = 5$. Искомое число находим по формуле (2.4):

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Пример 2.15

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова *обороноспособность*?

В этом слове 18 букв. Из них семь букв *о*, две буквы *б*, одна буква *р*, две буквы *н*, одна буква *п*, три буквы *с*, одна буква *т* и один мягкий знак. Следовательно,

$$n = 18,\ n_1 = 7,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1,\ n_4 = 2,\ n_5 = 1,\ n_6 = 3,\ n_7 = 1,\ n_8 = 1.$$

Искомое число различных слов равно:

$$\dot{P}_{18} = \frac{18!}{7!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} \approx 1{,}03\cdot 10^{11}.$$

Упражнения

1. Сколько существует 10-значных двоичных чисел, в каждом из которых единиц столько же, сколько и нулей? Числа могут начинаться с нуля.

2. Сколько существует 10-значных двоичных чисел, в каждом из которых единиц столько же, сколько и нулей, но числа с нуля начинаться не могут.

3. Сколько существует 6-значных троичных чисел, в которых нет нулей?

4. В 11-значном числе 4 двойки, 3 тройки, 1 четверка, 3 пятерки. Сколько существует таких чисел, которые могут быть образованы перестановкой этих цифр, если каждое число начинается с последовательности 334 и оканчивается тремя двойками?

5. Сколько новых слов можно получить путём перестановки гласных букв в заданном слове из нижеприведённых, если все согласные буквы остаются на своих местах без изменений (букву «й» гласной не считать)?

а. Водопроводчик. в. Авиационный. д. Змееед.

б. Громоотвод. г. Перестановочный. е. Треска.

2.7 Размещения без повторений

Постановка задачи. Множество A содержит n элементов. Из него поочерёдно выбирают по одному элементу и образуют упорядоченную последовательность длины m, где $m \leq n$. Сколько существует таких последовательностей?

Так как элементы выбираются из множества, где нет повторов, то элементы в каждой из последовательностей не могут встречаться более одного раза. Такие последовательности называют *размещениями без повторений.*

Очевидно, что размещения могут отличаться одно от другого не только элементами, но и порядком записи элементов. Например, размещения 365 и 346, составленные из элементов множества

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \tag{2.5}$$

являются различными, поскольку отличаются одно от другого наборами цифр. Размещения той же длины 356 и 365, хотя и состоят из одних и тех же элементов множества A, но отличаются одно от другого порядком записи цифр, поэтому также различны.

Пример 2.16

Сколько существует размещений длины 3, которые можно составить из элементов множества (2.5)?

Так как размещения – это упорядоченные последовательности, то для нахождения их количества можно воспользоваться правилом произведения. Первый элемент выбираем шестью способами. Останется пять элементов. Для выбора второго элемента существует 5 способов, для третьего – 4. Искомое число размещений равно: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Выведем формулу числа размещений без повторений для общего случая. Если множество содержит n элементов, то согласно правилу произведения первый элемент можно выбрать n способами, второй после него – $n - 1$ способами, третий – $n - 2$ способами и так далее до элемента m, который можно выбрать $n - m + 1$ способами. Следовательно,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1), \tag{2.6}$$

где A_n^m – число размещений из n элементов по m без повторений.

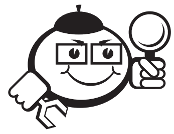
Умножим и разделим выражение (2.6) на $(n - m)!$:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)\cdot(n-m)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ \dots\ 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)!}.$$

Числитель последней формулы представляет собой произведение натуральных чисел от 1 до n без повторов и без пропусков сомножителей, следовательно, формулу для числа размещений без повторений можно записать в виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.7}$$



Пример 2.17

Сколько существует трёхзначных десятичных чисел, в каждом из которых нет повторов цифр? С нуля числа не начинаются.

По правилу произведения: первую цифру можно выбрать из девяти цифр (так как нулю запрещено занимать место старшего разряда), вторую – также из девяти (поскольку нуль возвращён), третью – из восьми. Следовательно, искомое число N равно:

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

С применением формулы для числа размещений эту задачу решим при условии, что существует один элемент, с которого не должно начинаться ни одно размещение. Запишем искомое число N в виде

$$N = A_n^m - A_{n-1}^{m-1}, \tag{2.8}$$

где A_n^m – число всех возможных m-элементных размещений. Сюда входят и те размещения, которые начинаются с отмеченного элемента;

A_{n-1}^{m-1} – число только тех размещений, которые начинаются с отмеченного элемента.

Запишем формулу (2.8) в развёрнутом виде:

$$N = \frac{n!}{(n-m)!} - \frac{(n-1)!}{[n-1-(m-1)]!} = \frac{n(n-1)!}{(n-m)!} - \frac{(n-1)!}{(n-m)!}.$$

Выражение $\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}$ вынесем за скобки:

$$N = \frac{(n-1)! \cdot (n-1)}{(n-m)!}. \tag{2.9}$$

Возвращаемся к заданному примеру. По формуле (2.9) находим число размещений при $n = 10$, $m = 3$:

$$N = \frac{(10-1)! \cdot (10-1)}{(10-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 648.$$

Пример 2.18

Сколько существует двухразрядных восьмеричных чисел, в которых нет четных цифр и нет повторов? Привести список этих чисел. (Это пример задачи на пересчёт и перечисление согласно [33].)

Искомые числа состоят только из нечётных цифр. В восьмеричной системе нечётными являются цифры: 1, 3, 5, 7. Согласно условию, $n = 4$, $m = 2$. По формуле (2.7) определяем количество искомых чисел:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12.$$

Список искомых чисел имеет вид: 13, 15, 17, 31, 35, 37, 51, 53, 57, 71, 73, 75.

Пример 2.19

В библиотеке имеется по одному экземпляру 10 книг о приключениях. Четырём читателям предлагается выбор. Каждый читатель может выбрать только одну книгу. Сколько всего существует способов выбора книг этими четырьмя читателями?

Пронумеруем книги: 0, 1, 2, 3, …, 9 и переформулируем задачу: сколько существует четырехразрядных чисел, которые могут быть образованы из 10 цифр (без повторов), при условии, что числа могут начинаться с нуля?

Согласно новому условию,

$$n = 10,\ m = 4,$$

тогда искомое число способов распределения 10 книг между четырьмя читателями равно:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Упражнения

1. Сколько существует трёхразрядных восьмеричных чисел, в которых нет цифр 0,1,2 и нет повторяющихся цифр?

2. В тире 10 мишеней. Перед ними три стрелка. Каждый стрелок произвольно выбирает себе мишень, но так, что каждую мишень выбирает не более чем один стрелок. Сколькими способами возможен выбор?

3. Из восьмеричных цифр образуют пятизначные числа, в которых нет повторов цифр. Сколько существует таких чисел при условии, что каждое число начинается с единицы и оканчивается тройкой?

4. Четыре школьника выбирают по одной книге из 9 предложенных. Все книги разные. Сколькими способами возможен выбор?

5. Сколько существует пятизначных восьмеричных чисел, в каждом из которых нет повторов цифр, и в каждом числе последняя цифра на единицу больше первой? С нуля числа не начинаются.

2.8 Размещения с повторениями

Постановка задачи. Из множества, содержащего n элементов, образуют *размещения с повторениями*, т. е. упорядоченные последовательности длины m, в которых одни и те же элементы могут повторяться. Сколько существует таких последовательностей?

Воспользуемся правилом произведения. Так как в заданном множестве n элементов, то первый элемент может быть выбран n способами, второй – n способами и т. д. до элемента с номером m. В результате получаем

$$\dot{A}_n^m = n^m, \tag{2.10}$$

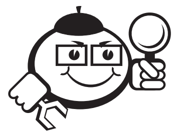
где точка над буквой A обозначает: размещения могут быть с повторениями.

Пример 2.20

Сколько существует трёхразрядных чисел, которые могут быть образованы из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если повторы разрешены?

Согласно условию данного примера $n = 5$, $m = 3$, т. е. каждое число из искомых – это трёхэлементная упорядоченная последовательность цифр, где цифры могут повторяться. По формуле (2.10) получаем:

$$\dot{A}_5^3 = 5^3 = 125.$$



Пример 2.21

Сколько существует пятиразрядных десятичных чисел, в которых возможны любые повторы цифр?

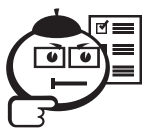
В условии нет оговорки, что числа могут начинаться с нуля. Это значит, что на месте старшего разряда можно поставить любую цифру, кроме нуля. На месте остальных разрядов могут стоять и нули.

Сначала задачу решим в общем виде. Пусть n – основание системы счисления, m – длина выборки. Первую цифру из n можно выбрать $n – 1$ способами (с нуля числа не начинаются). Во всех остальных разрядах цифры выбираются n способами каждая. Таким образом, число N m-разрядных чисел равно:

$$N = (n - 1)\ \dot{A}_n^{m-1} = (n - 1)\ n^{m-1}. \qquad (2.11)$$

Согласно условию данного примера, $n = 10$, $m = 5$. Следовательно, по формуле (2.11) получаем:

$$N = 9 \cdot 10^4 = 90\ 000.$$



Упражнения

1. Сколько существует двузначных десятичных чисел? Числа могут начинаться с нуля.

2. Сколько существует пятизначных чисел троичной системы счисления? Числа с нуля не начинаются.

3. Сколько слов длины 12 можно составить из букв a и b?

4. Из элементов множества $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ образуют последовательности длины 3, каждая из которых начинается с буквы *б*. Сколько всего существует таких последовательностей, если повторы букв возможны?

5. Из элементов множества $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ образуют последовательности длины 3, каждая из которых не начинается с буквы *д*. Сколько всего существует таких последовательностей, если повторы букв возможны?

6. Сколько существует 12-значных двоичных чисел, если все они начинаются с единицы и все оканчиваются единицей?

7. Сколько существует 7-значных троичных чисел, не содержащих нулей?

. . . .

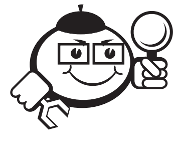
2.9 Сочетания без повторений

Постановка задачи. Из множества A, содержащего n элементов, выделили некоторое подмножество, состоящее из m элементов ($m \le n$). Сколько существует таких подмножеств?

Подмножества множества A, содержащие m элементов, получили название *сочетаний* из n элементов по m, где $n = |A|$. Число всех сочетаний из n элементов по m во многих литературных источниках принято обозначать знаком C_n^m [7; 16; 17; 20; 23; 33; 38; 40; 46], где нижний индекс n – это число всех тех элементов, из которых осуществляются выборки. Верхний индекс m показывает, сколько элементов входит в выборку. Существуют и другие обозначения числа сочетаний, например $C(n, k)$ [14; 35], а также ${}_nC_m$ [51] и $\binom{n}{m}$ [46; 52; 57].

Размещения, описываемые формулой (2.7), это m-элементные последовательности, отличающиеся одна от другой как элементами, так и порядком записи элементов. В отличие от размещений сочетания – это неупорядоченные последовательности m элементов. Сочетания отличаются одно от другого только элементами, а порядок расположения их в последовательности не имеет значения. Следовательно, если число A_n^m разделить на $m!$, то получим формулу для числа сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.12}$$

. . . .  Пример 2.22 . . . .

Сколько существует семизначных двоичных чисел, содержащих точно три единицы? Числа могут начинаться с нуля.

Переформулируем задачу: сколькими способами можно выбрать три места из семи, чтобы поставить на них по единице, а остальные заполнить нулями? Очевидно, что все такие выборки являются сочетаниями, поскольку порядок выбора мест значения не имеет. В данном случае $n = 7$, $m = 3$, следовательно, согласно формуле (2.12), искомое число сочетаний равно:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Эту задачу можно сформулировать иначе: сколько существует семизначных чисел двоичной системы счисления, содержащих точно четыре нуля? В этом случае $n = 7$, $m = 4$. По формуле (2.12) находим:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Ответ получился такой же, как и при первой формулировке. В общем случае справедливым является равенство:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Пример 2.23

На плоскости проведена окружность. На ней поставлено n точек. Каждые две из этих точек соединены отрезком. Отрезки внутри круга образуют внутренние точки пересечения. При этом в каждой из них пересекаются точно два отрезка. Сколько точек пересечения имеется внутри круга? Точки пересечения линий с окружностью не учитывать.

Чтобы получить одну точку пересечения, необходимо взять четыре точки на окружности. Следовательно, точек пересечения внутри круга столько же, сколько существует четвёрок точек, расположенных на окружности. Количество таких четвёрок, согласно формуле (2.12), равно:

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}. \qquad (2.13)$$

На рисунке 2.1 изображена окружность, на которой поставлено 7 точек, то есть $n = 7$. Подставим в формулу (2.13) значение $n = 7$:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)}{24} = 35.$$

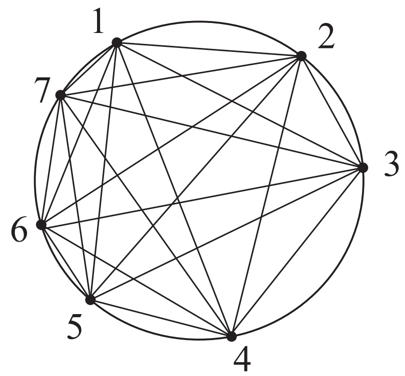
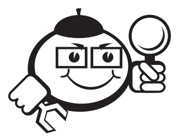


Рис. 2.1

Таким образом, внутри круга имеется 35 точек пересечения отрезков.



Пример 2.24

На рисунке 2.2 изображён шахматный город размером $m \times n$ квадратов, где $n = 4$ – число квадратов (клеток) по вертикали, $m = 6$ – число квадратов по горизонтали. Движение в шахматном городе возможно лишь по вертикальным и горизонтальным отрезкам. Определить число кратчайших путей:

1) от точки A до точки B;
2) от точки A до точки B с обязательным заходом в точку C;
3) от точки A до точки B, без захода в точку C.

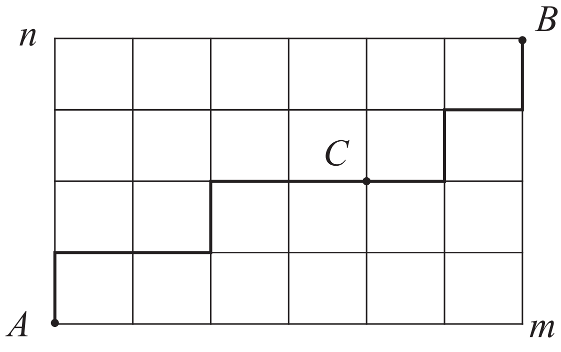


Рис. 2.2

Решим задачу, рассуждая следующим образом:

1) кратчайший путь от точки A до точки B состоит из $n + m$ отрезков, причем в нём содержится точно n вертикальных отрезков и точно m – горизонтальных. Закодируем пути. Нулём обозначим движение вверх, единицей – движение вправо. Тогда каждому пути будет соответствовать $(m + n)$-разрядный двоичный код, содержащий точно m единиц. И наоборот, каждому $(m + n)$-

разрядному двоичному коду, содержащему m единиц (и n нулей), будет соответствовать вполне определённый путь, соединяющий точки A и B. Например, кодом 0110111010 представлен путь, выделенный на рисунке 2.2 жирными линиями. Следовательно, чтобы решить поставленную задачу, достаточно найти число $(m + n)$-разрядных двоичных кодов, содержащих n нулей и m единиц. Согласно формуле (2.12), это число равно:

$$C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!}{m!n!}. \tag{2.14}$$

Согласно условию $n = 4$, $m = 6$:

$$C_{4+6}^{6} = \frac{(4+6)!}{4!\cdot 6!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

Таким образом, число N кратчайших путей, ведущих от A к B, равно 210;

2) чтобы определить число кратчайших путей от A до B, проходящих через точку C, сначала найдём число N_1 путей, соединяющих точки A и C, затем определим число N_2 путей, соединяющих точки C и B. По формуле (2.14) находим:

$$N_1 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15; \quad N_2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$$

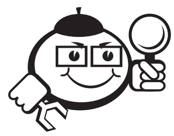
По правилу произведения:

$$N = 15\cdot 6 = 90.$$

Таким образом, через точку C проходит 90 путей;

3) число путей, ведущих от A к B и не проходящих через точку C, равно:

$$210 - 90 = 120.$$



Пример 2.25

Сколько существует семизначных чисел двоичной системы счисления, в которых нет рядом стоящих единиц, если считать, что числа могут начинаться с нуля?

Обозначим искомое число буквой N. Оно состоит из нескольких слагаемых. Рассмотрим каждое из них:

а) в числе нет единиц. Такое число существует только одно (оно состоит из семи нулей), следовательно, $n_1 = 1$;

б) в числе содержится точно одна единица. Таких чисел 7, т. е. $n_2 = 7$;

в) в числе содержатся точно две единицы и пять нулей. Запишем последовательность из пяти нулей. Между нулями, а также слева и справа от них поставим по одной точке. Получим шесть точек. Заменим какие-либо две точки единицами, а все остальные точки удалим. Получится семизначное двоичное число, содержащее пять нулей и две единицы, которые стоять рядом не могут. Всего существует $C_6^2 = 15$ способов замены двух точек из шести единицами, следовательно, $n_3 = 15$;

г) в семизначном числе может содержаться три единицы и четыре нуля. Запишем нули в ряд и расставим точки по аналогии с предыдущим случаем. Получим пять точек. Заменить их тремя единицами можно $C_5^3 = 10$ способами. Следовательно, $n_4 = 10$;

д) число, в котором четыре единицы и три нуля, существует только одно: 1010101, следовательно, $n_5 = 1$.

Сумма всех найденных величин даёт искомое число:

$$N = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34.$$

Пример 2.26

Сколько существует пятизначных десятичных чисел, не начинающихся с нуля, в которых цифры идут:

1) в порядке возрастания слева направо?

2) в порядке убывания слева направо?

На первый взгляд ответы в обоих случаях должны быть одинаковыми. Но это не так:

1) запишем десятичные цифры в порядке их возрастания слева направо, удалив нуль, так как по условию с нуля пятизначные числа не начинаются. Пять цифр из девяти можно выбрать $C_9^5 = 126$ способами. Таким образом, ответом к первой задаче является число 126;

2) вторая задача решается точно таким же образом, но с учётом того, что нуль не удаляется. Все десятичные цифры записываем, начиная с 9, в порядке убывания слева направо. Так как нуль стоит в конце этой последовательности, то он не может оказаться первой цифрой в пятизначном числе. Следовательно, в сочетаниях участвуют все 10 цифр и количество пятизначных чисел, в которых цифры идут в порядке убывания, равно: $C_{10}^5 = 252$.

Пример 2.27

Множество A состоит из 4-значных десятичных чисел. Повторы цифр возможны. Числа могут начинаться с нуля. Сколько в этом множестве таких чисел, в которых:

1) единиц больше, чем нулей?

2) нулей больше, чем единиц?

3) нулей столько же, сколько единиц?

Из этих трёх задач достаточно решить только одну, а ответы к остальным можно найти очень простыми рассуждениями. Однако в данном случае решим их независимо одна от другой.

1. Обозначим буквой M количество чисел, в которых единиц больше, чем нулей. Рассмотрим шесть случаев:

а) в числе одна единица и нет нулей. Если число начинается с единицы, то в каждом из остальных разрядов может стоять одна цифра из восьми. Таких чисел возможно 512. Единица может занимать любое из четырёх мест в числе. Следовательно, всего возможно $512 \cdot 4 = 2\,048$ чисел, в которых нет нулей, и содержится точно одна единица;

б) в числе две единицы и нет нулей. Так как два места в числе заняты единицами, то для других цифр остаётся также два места. Они могут быть заняты $8 \cdot 8 = 64$ вариантами. Для размещения двух единиц существует $C_4^2 = 6$ способов. Тогда чисел с двумя единицами и без нулей существует $64 \cdot 6 = 384$;

в) в числе две единицы и один нуль. С этими характеристиками возможно $C_3^2 \cdot 4 \cdot 8 = 96$ чисел;

г) в числе три единицы и нет нулей. Таких чисел существует $C_4^1 \cdot 8 = 32$;

д) в числе три единицы и один нуль. Так как других цифр нет, то числа можно рассматривать как двоичные: $C_4^1 = 4$;

е) в числе четыре единицы. Это число 1111.

Таким образом:

$$M = 2048 + 384 + 96 + 32 + 4 + 1 = 2\,565.$$

Столько возможно чисел, в каждом из которых единиц больше, чем нулей.

2. Количество чисел, в которых нулей больше, чем единиц, обозначим буквой N. Если чисел, в которых единиц больше, чем нулей, существует 2 565,

то столько же возможно и тех чисел, в которых нулей больше, чем единиц, то есть

$$N = M = 2\ 565.$$

3. Количество чисел, в которых нулей столько же, сколько единиц, обозначим буквой K. Как и в первом примере, разобьём задачу на более простые подзадачи. Необходимо рассмотреть только три случая:

а) в числе нет нулей и нет единиц. Таких чисел существует $8^4 = 2^{12} = 4\ 096$;

б) в числе одна единица и один нуль. Таких чисел возможно $C_4^2 \cdot 8 \cdot 2 = 768$;

в) в числе две единицы и два нуля: 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011 – шесть чисел.

Таким образом, количество чисел, в каждом из которых нулей столько же, сколько и единиц, равно:

$$K = 4\ 096 + 768 + 6 = 4\ 870.$$

Проверим решения. Так как в каждом числе либо единиц больше чем нулей, либо нулей больше чем единиц, либо единиц и нулей поровну, то должно выполняться равенство:

$$M + N + K = 10\ 000, \tag{2.15}$$

где 10 000 – это общее количество четырёхзначных чисел, которые могут начинаться с нуля, и в которых нет ограничений на повторы цифр. Подставим в (2.15) значения M, N и K:

$$2\ 565 + 2\ 565 + 4\ 870 = 10\ 000.$$

Таким образом, равенство (2.15) выполняется, следовательно, ошибок нет.

Заметим, что поскольку $M = N$, то формулу (2.15) можно записать в виде

$$2M + K = 10\ 000. \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что хотя в данном примере приведены три задачи, решать их все нет необходимости. Достаточно, как уже упоминалось, решить только одну: найти число K. А числа M и N согласно (2.16) определить по формуле:

$$M = N = \frac{10\ 000 - K}{2}.$$

. . . .

Упражнения

1. Сколько существует 7-значных двоичных чисел, в каждом из которых содержится точно три единицы? Числа могут начинаться с нуля.

2. Сколько существует 10-значных двоичных кодов, содержащих по 6 нулей? Коды могут начинаться с нуля.

3. Сколько существует 8-значных двоичных чисел, начинающихся с нуля, если в каждом коде четыре нуля?

4. Сколько существует 10-разрядных двоичных чисел, в которых четное число единиц? Числа могут начинаться с нуля.

5. В шахматном городе размером $m \times n$ число кратчайших диагональных путей, состоящих из 11 отрезков, равно 462. Найдите m и n, если

$$m < n, \quad m \neq 1.$$

6. В числе 32514768 три цифры заменили нулями. Получилось новое число. Если в заданном числе заменить нулями другие три цифры, получим ещё одно число. Сколько новых восьмизначных чисел можно получить, если нулями заменять какие-либо три цифры? Новые числа могут начинаться с нуля.

7. Замок сейфа открывается одновременным нажатием трех кнопок с номерами i, j, k, где $i, j, k = 1,2,3, \ldots, 12$; $i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$. Тройка этих номеров образует кодовый ключ. Некто решил открыть сейф путем проб и ошибок (будем считать, что сирена, подающая сигнал тревоги на неправильный код, отключена). Сколько троек ему придется проверить в самом неблагоприятном случае?

8. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей? С нуля числа не начинаются.

9. Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

2.10 Сочетания с повторениями

Постановка задачи. Сколько существует выборок, содержащих по m элементов из множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, если в выборки могут входить повторяющиеся элементы и если порядок элементов в выборках безразличен?

Такие выборки называют *сочетаниями с повторениями*.

Например, если

$$A = \{a, b, c, d\},$$

то выборки длины $m = 2$ имеют вид:

$$aa, bb, cc, dd, ab, bc, cd, ac, bd, ad.$$

Сочетания с повторениями рассмотрим на примерах.

Пример 2.28

Имеются репродукции с картин Шишкина, Левитана, Поленова и Васильева не менее чем по 10 экземпляров каждой. Требуется выбрать 10 репродукций в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

Закодируем выборку следующим образом. Пусть решено взять три репродукции Шишкина, две – Левитана, одну – Поленова и четыре – Васильева. Запишем три единицы (это репродукции Шишкина). После них поставим нуль. Затем запишем две единицы (это репродукции Левитана) и нуль. Затем поставим одну единицу (репродукция Поленова) и нуль. В конце запишем четыре единицы (репродукции Васильева), но нуль после них не ставим. Получилось 13-значное двоичное число:

$$1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1,$$

где нули отделяют одни репродукции от других.

Очевидно, что всякое распределение трех нулей в этом коде дает некоторый вариант выбора репродукций. Например:

1111001011111 – взято четыре репродукции Шишкина (об этом говорят первые четыре единицы в коде), ни одной репродукции Левитана (так как между двумя нулями нет единиц), одна репродукция Поленова (одна единица после второго нуля) и пять репродукций Васильева (последние пять единиц).

0001111111111 – взято 10 репродукций Васильева. Все другие репродукции в выборку не вошли. И так далее.

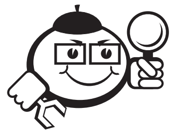
Таким образом, число вариантов выбора репродукций равно числу всех возможных 13-значных двоичных кодов, в каждом из которых содержится точно десять единиц:

$$\dot{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286,$$

где символом $\dot{C}_4^{10}$ обозначено число сочетаний с повторениями из четырех элементов по 10.

В общем случае если из n элементов множества A составляют выборки, каждая из которых содержит m элементов, причём повторения возможны, то число всех таких выборок равно:

$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \tag{2.17}$$

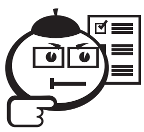


Пример 2.29

По трём ящикам требуется разложить 45 гаек таким образом, чтобы в каждом ящике оказалось хотя бы по десять гаек. Сколькими способами это можно сделать?

По 10 гаек в каждый из ящиков можно положить заранее. Тогда для произвольной раскладки останется 15 гаек. Следовательно $m = 15$, $n = 3$. По формуле (2.17) находим:

$$\dot{C}_3^{15} = C_{3+15-1}^{15} = \frac{17!}{15! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 17}{1 \cdot 2} = 136.$$



Упражнения

1. В магазине продают четыре вида конфет. Сколькими способами можно купить 15 конфет в произвольном наборе?

2. Продаются тетради пяти цветов: с синей, фиолетовой, красной, зеленой и оранжевой обложками.

а. Требуется купить 10 тетрадей любого цвета. Сколькими способами это можно сделать?

б. Требуется купить 15 тетрадей. Пять из них должны быть с фиолетовой обложкой, а обложки всех остальных тетрадей могут быть любого цвета, кроме фиолетового. Сколькими способами возможна такая покупка?

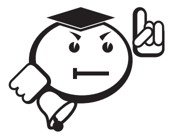
в. Требуется купить 16 тетрадей, среди которых точно 4 тетради должны быть с зеленой обложкой и точно 5 тетрадей – с оранжевой. Цвет обложки остальных тетрадей значения не имеет. Сколькими способами возможна такая покупка?

. . . .

3 Теория графов

3.1 Понятие графа

Теория графов как один из разделов дискретной математики в настоящее время успешно применяется в социологии, экономике, биологии, медицине, химии, психологии и других науках. Но особенно велико её значение в самой дискретной математике, в таких её разделах, как программирование, теория логических схем, контактных структур, многотактных дискретных автоматов, теория бинарных отношений и др.



Граф – это множество V точек, определенным образом соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества V называются *вершинами* графа, а соединяющие их линии – *ребрами*. Вершины можно обозначать не только точками, но и кружка́ми. Вершины графа обычно нумеруют десятичными числами, но могут использоваться и любые другие знаки. Граф, вершины которого каким-либо образом пронумерованы, называется *помеченным* графом.

В общем случае те или иные пары вершин графа могут соединяться несколькими рёбрами. Такие ребра называют *кратными* (параллельными). Кроме того, граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину саму с собой. Такие ребра называются *пе́тлями*. Вершина называется *изолированной*, если у нее нет петель, и из нее не выходит ни одного ребра.

Обычно различают три типа графов: *простые* (или *линейные* по терминологии [51]), *псевдографы* и *мультиграфы*. Граф, согласно [51, с. 56], называется *линейным*, если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример линейного (простого) графа приведен на рисунке 3.1.

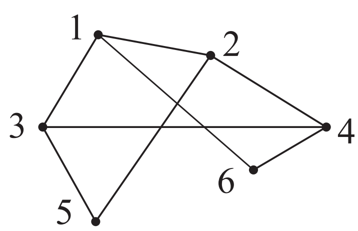


Рис. 3.1

Граф, содержащий петли или кратные ребра (или то и другое), называется *псевдографом* [8, с. 101; 33, с. 161]. Пример псевдографа приведен на рисунке 3.2, где вершина 1 имеет две кратные петли, вершина 2 – одиночную петлю, а вершины 2 и 3 соединены кратными ребрами.

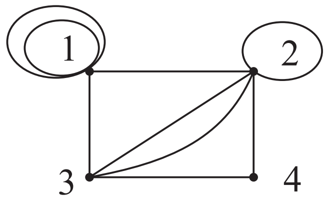


Рис. 3.2

Псевдограф без петель называется *мультиграфом* [8, с. 101; 33, с. 161]. Пример мультиграфа приведен на рисунке 3.3.

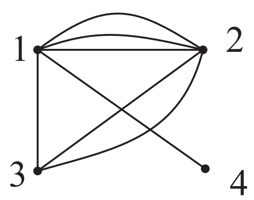


Рис. 3.3

Однако в данном пособии использование этой терминологии большей частью не является необходимостью, поэтому все графы в дальнейшем будем называть просто графами, за исключением тех случаев, когда потребуется уточнить, может ли граф содержать петли и кратные рёбра. Обозначать помеченные графы будем буквой G.

Помеченный граф может быть задан не только рисунком, но и аналитически, множеством неупорядоченных пар номеров вершин, где каждая пара номеров обозначает соответствующее ребро. Например, аналитическое представление графа, изображённого на рисунке 3.1, имеет вид:

$$G = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}.$$

При удалении из графа G некоторых вершин будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют *подграф* G' графа G [14].

Для всякого подграфа справедливы утверждения:

$$V' \subseteq V \text{ и } E' \subseteq E,$$

где V и E – множества вершин и ребер графа G соответственно; V' и E' – множества вершин и ребер подграфа G'. Отсюда следует, что всякий граф является подграфом самого себя.

Если из графа G удалить все вершины, то получим граф, не содержащий ни вершин, ни рёбер. Согласно [51, с. 57], «граф, который не имеет ни одной вершины и ни одного ребра, называется *пустым*». Очевидно, что пустой граф является подграфом любого графа.

Если n – число вершин графа G, то всего существует 2^n подграфов. Чтобы убедиться в этом, каждой вершине графа поставим в соответствие определённый двоичный разряд и условимся считать, что нуль обозначает удаление вершины, а единица – вершина из графа не удаляется. Тогда все подграфы окажутся пронумерованными в двоичной системе, и по двоичному числу всегда можно найти соответствующий подграф. Между множеством подграфов и множеством n-разрядных двоичных чисел существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, если n – число вершин графа, то подграфов существует столько же, сколько и n-разрядных двоичных чисел, то есть 2^n.

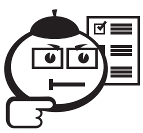
Пусть задан граф G, содержащий n пронумерованных вершин. Добавим к ним ещё одну вершину и соединим ее с некоторыми вершинами графа G. Получим *надграф* графа G. Рассуждая, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что при одной добавленной вершине возможно 2^n надграфов.

Если из простого графа G удалить одно или несколько ребер, оставив все вершины на прежних местах, то получим *частичный* граф. Формально частичный граф определяется следующим образом.

Пусть V и E – множества вершин и ребер исходного графа G. Граф G' называется частичным графом графа G, если $V' = V$ и $E' \subseteq E$ [14]. Отсюда следует, что всякий граф является частичным по отношению к самому себе.

Если из простого графа G удалить все ребра, то останется граф, состоящий только из изолированных вершин. Такой граф, в котором нет ни одного ребра, называется *нуль-графом*.

Для всякого простого графа, содержащего m рёбер, можно построить 2^m частичных графов. Убедиться в этом можно, если воспользоваться тем же приёмом их кодирования, как и в случае подграфов. Но в данном случае двоичные разряды ставятся в соответствие не вершинам графа, а его рёбрам с аналогичной интерпретацией нулей и единиц (единицы могут обозначать удаление соответствующих рёбер).



Упражнения

1. К линейному графу, содержащему 5 вершин, добавили ещё одну вершину. Сколько существует линейных надграфов?

2. В линейном графе G 8 рёбер. Сколько частичных графов можно построить из графа G путём удаления из него тех или иных рёбер?

3. Дан помеченный граф G, содержащий 7 вершин. Сколько подграфов, содержащих по 5 вершин, можно построить из графа G?

4. Сколько существует линейных помеченных графов, в каждом из которых содержится:

1) три вершины? 2) четыре вершины? 3) пять вершин?

5. В графе G 20 вершин. Каждые две его вершины соединены точно одним ребром.

а. Сколько рёбер в графе G?

б. Из графа G удалили две вершины. Сколько рёбер осталось?

в. Из графа G удалили n вершин. Осталось 91 ребро. Найдите n.

. . . .

3.2 Смежность. Инцидентность. Степень вершины

Две вершины $v \in V$ и $w \in V$, где V – множество вершин графа G, называются *смежными*, если они соединены ребром. Например, на рисунке 3.1 смежными являются вершины 1 и 2, 1 и 3, 4 и 6 и др. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. На рисунке 3.1 смежными являются ребра $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ и $\{4,6\}$ и др. Если вершина является концом ребра, то вершина и ребро называются *инцидентными*. На рисунке 3.1 ребро $\{3,4\}$ инцидентно вершине 3. Оно инцидентно также и вершине 4. Число $\rho(v)$ ребер, инцидентных вершине v, называется её *степенью*. Например, степень вершины 1 (рис. 3.1) равна 3, степень вершины 5 равна 2, т. е. $\rho(1) = 3$, $\rho(5) = 2$. Степень изолированной вершины равна нулю. Степень изолированной вершины, содержащей одну петлю, равна 2. Вершина, степень которой равна 1, называется *висячей*, или *концевой*. На рисунке 3.3 это вершина 4: $\rho(4) = 1$.

Граф можно задать упорядоченным набором степеней его вершин. Например, набор степеней вершин графа, изображённого на рисунке 3.1, имеет вид 333322.

Сумма степеней всех вершин всякого графа (не только простого, но и мультиграфа, а также псевдографа) есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа. Этим свойством можно пользоваться для определения числа K ребер графа:

$$K = \frac{\rho(1) + \rho(2) + \rho(3) + ... + \rho(n)}{2}. \qquad (3.1)$$

Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рисунке 3.2, равна:

$$\rho(1) + \rho(2) + \rho(3) + \rho(4) = 6 + 6 + 4 + 2 = 18,$$

откуда следует, что в графе девять ребер.

Вершина называется *четной*, если ее степень есть четное число. Вершина называется *нечетной*, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе *число нечетных вершин четно*. Например, в графе, приведённом на рисунке 3.3, четыре вершины, и все они являются нечётными. Число четных вершин в графе может быть как четным, так и нечетным. Например, в графе на рисунке 3.1 число чётных вершин чётно, а на рисунке 3.4 – нечётно.

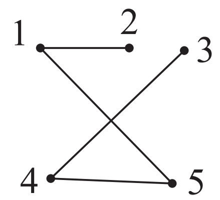
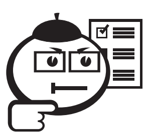


Рис. 3.4

Граф, в котором нет нечётных вершин, называется *эйлеровым*. Главная особенность эйлеровых графов состоит в том, что в каждом из них существует замкнутая *уникурсальная линия* [49, с. 91], то есть такая линия, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги, пройдя при этом по каждому ребру точно один раз. Примером эйлерового графа является граф, изображенный на рисунке 3.2. В нём все вершины чётны. На рисунке 3.1 приведён граф, в котором четыре нечётные вершины. Их номера 1, 2, 3, 4. В класс эйлеровых этот граф не входит.

Граф, в котором содержится точно две нечётные вершины, называется *полуэйлеровым* [47, с. 45]. В полуэйлеровом графе существует разомкнутая уникурсальная линия. Её началом и концом являются нечётные вершины.



Упражнения

1. Граф задан множеством рёбер:

$$G = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{2,5\}, \{3,7\}, \{5,6\}\}.$$

а. Укажите номера чётных вершин.

б. Укажите номера висячих вершин.

в. Укажите номера нечётных вершин, не являющихся висячими.

г. Укажите номера вершин, смежных по отношению к вершине 1.

д. Приведите набор степеней всех вершин графа.

2. Если задан набор степеней вершин, то можно построить соответствующий граф, но не во всех случаях: для некоторых наборов графы не существуют. В нижеприведённых списках укажите номера тех наборов, для которых граф построить невозможно.

1) а) 0 1 1 0 2 3 2	2) а) 1 1 3 4 5 7 6	3) а) 1 0 1 4 5 6 7
б) 1 1 1 0 1 3 3	б) 2 2 0 1 0 1 7	б) 1 2 3 4 1 2 3
в) 2 1 3 3 4 4 4	в) 6 9 9 4 1 3 2	в) 0 0 1 0 0 0 0
г) 0 0 1 1 0 1 5	г) 5 6 7 3 3 4 5	г) 2 2 2 1 2 2 2
д) 2 3 3 2 1 3 3	д) 2 6 7 3 3 3 0	д) 0 7 0 7 1 0 7
е) 4 2 1 0 7 3 0	е) 3 0 0 3 0 0 3	е) 2 3 5 6 7 4 2
ж) 2 5 5 1 1 1 0	ж) 0 0 1 1 0 1 7	ж) 3 4 5 4 3 2 1

. . . .

3.3 Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа

Граф называется *однородным*, если степени всех его вершин равны между собой. Некоторые авторы пользуются другой терминологией. Например: «Если все вершины графа имеют одинаковую степень, то такой граф называется *регулярным*» [1, с. 271]. Этого же термина придерживаются в [38, с. 193].

Примеры однородных графов приведены на рисунке 3.5.

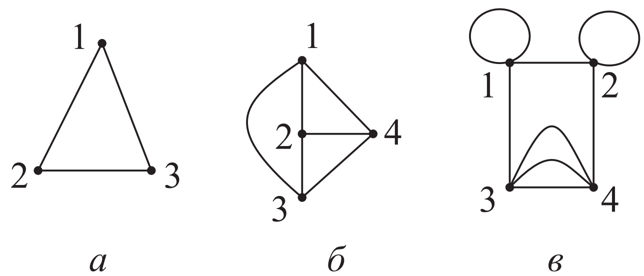


Рис. 3.5

Если в формуле (3.1) принять:

$$\rho(1) = \rho(2) = \ldots = \rho(n) = \rho,$$

где n – число вершин графа; $\rho(i)$ – степень i-й вершины графа ($i = 1, 2, \dots, n$), то формула для числа рёбер однородного графа примет вид:

$$K = \frac{\rho n}{2}. \tag{3.2}$$

Простой граф (без петель и кратных рёбер) называется *полным*, если каждая пара его вершин соединена точно одним ребром. Примеры полных графов приведены на рисунках 3.5, *а* и 3.5, *б*.

Степень каждой из вершин полного графа равна $n - 1$. Следовательно, согласно формуле (3.2), число K ребер полного графа равно:

$$K = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пусть дан неполный граф G. Дополним его новыми рёбрами так, чтобы получился полный граф. Все добавленные рёбра и все вершины исходного графа G образуют новый граф G'. Построенный таким образом граф G' называют *дополнением* заданного графа до полного.

На рисунке 3.6 пунктирными линиями показано дополнение графа G. На рисунке 3.4 дополнение представлено отдельным графом.

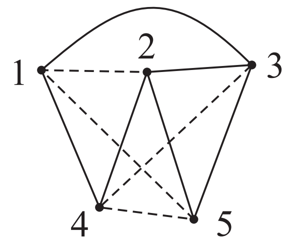
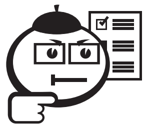


Рис. 3.6

Очевидно, что дополнением полного графа, построенного на n вершинах, является нуль-граф (состоящий из n изолированных вершин), а дополнением нуль-графа является полный граф.



Упражнения

1. В однородном графе семь вершин, и степень каждой вершины равна 6. Сколько в этом графе ребер?

2. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Возможен ли однородный граф, в котором:

1) семь вершин и степень каждой вершины равна 3?

2) восемь вершин и степень каждой из них равна 4?

3) четыре вершины и шесть ребер?

4) семь нечетных вершин и шесть ребер?

5) семь вершин и степень каждой вершины равна 2?

6) шесть вершин и семь ребер?

7) восемь вершин и степень каждой из них равна 3?

3. Сколько ребер в полном графе, содержащем 10 вершин?

4. В полном графе 105 ребер. Сколько в нём вершин?

5. В частичном графе полного графа, содержится 12 вершин и 54 ребра. Сколько ребер в дополнении частичного графа?

6. Из полного графа, содержащего 20 вершин, удалили несколько вершин. В получившемся подграфе оказалось 66 ребер.

а. Сколько вершин удалено?

б. Сколько ребер удалено?

7. Найдите степень вершины полного графа, имеющего 91 ребро.

. . . .

3.4 Маршруты, цепи, циклы

Эти понятия интуитивно ясны. Однако авторы публикаций по теории графов обычно стремятся дать им точные определения. Например, Ф. Харари пишет: «Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер v_0, x_1, v_1, …, v_{n-1}, x_n, v_n; эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним» [52, с. 26]. В этом определении буквой v с цифровым индексом Ф. Харари обозначает вершины графа, а буквой x – рёбра.

Согласно определению, данному Ф. Харари, всякий маршрут начинается с номера вершины и оканчивается номером вершины. В соответствии с этим если в графе нет кратных рёбер и петель, то в маршруте рёбра можно не называть, достаточно перечислить только номера вершин. Такое представление маршрутов называется *вершинным*. Примером маршрута в графе (рис. 3.1) является последовательность вершин вида 1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 2 – 4 – 6.

Маршрут называется *цепью*, если в нем нет повторяющихся ребер. Всякая цепь имеет начальную вершину и конечную [33, с. 165]. (О. Е. Акимов использует другую терминологию: «Цепь имеет *голову* и *хвост*» [1, с. 238]). Цепь называется *простой*, если при вершинном её представлении в ней нет повторяющихся вершин. Пример простой цепи (рис. 3.1): 2 – 4 – 3 – 5.

Маршруты, цепи и простые цепи могут быть *замкнутыми* и *разомкнутыми*. В замкнутых маршрутах (а также цепях и простых цепях) начальная и конечная вершины совпадают, в разомкнутых – не совпадают. Примером замкнутого маршрута является последовательность вершин (рис. 3.1): 1 – 2 – 4 – – 3 – 5 – 2 – 4 – 6 – 1. Замкнутая цепь называется *циклом*. Простая замкнутая цепь называется *простым циклом*. Пример простого цикла: 2 – 4 – 3 – 5 – 2 (рис. 3.1).

Понятие простого цикла в теории графов является одним из важнейших. В литературе можно встретить различные его определения, но по смысловому содержанию они в основном совпадают. Например:

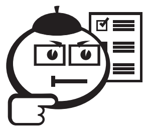
«Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза» [2, с. 17].

«Если в некоторой цепи начальная и конечная вершины совпадают, то такая цепь называется циклом» [40, с. 55].

«Цепь, в которой все вершины различны, кроме, может быть, её концов, называется простой. Замкнутая простая цепь называется простым циклом» [38, с. 196].

Этим определениям не противоречит и такой цикл, в котором только одно ребро, например 1 – 2 – 1 (рис. 3.1), а также граф, состоящий из одной вершины с петлей, так как формально эта петля образует цикл. Однако при таких допущениях получается, что во всяком графе, содержащем хотя бы одно ребро, содержится не менее одного цикла. В некоторых случаях это может создать значительные трудности, например в определении графа типа «дерево». Поэтому будем считать, что во всяком цикле содержится не менее трёх вершин, и такие последовательности, как 1 – 2 – 1 циклами не являются.

Число ребер, входящих в цепь, называется *длиной цепи* или *расстоянием* между начальной и конечной вершинами. Например, цепь 1, 2, 4, 3, 5 (рис. 3.1) содержит четыре ребра, следовательно, расстояние между вершинами 1 и 5, а также длина цепи равны 4.



Упражнения

1. Укажите длины (рис. 3.1): самой короткой и самой длинной из простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6.

2. В нижеприведенном списке укажите простые циклы (рис. 3.1).

1) 1, 2, 5, 6; 2) 1, 2, 4, 6, 1; 3) 2, 4, 3, 5, 2;

4) 2, 1, 6, 4, 2; 5) 1, 3, 2, 4, 1; 6) 1, 2, 4, 3, 5, 2.

3. Укажите вопросы, на которые Вы ответите «да».

а. Может ли последовательность, обозначающая маршрут, начинаться с номера ребра и оканчиваться номером вершины?

б. Может ли цепь состоять из одного ребра (и двух вершин)?

в. Может ли простой граф содержать цикл, состоящий из одного ребра?

г. Существуют ли маршруты в нуль-графе, множество вершин которого не является синглетоном?

д. Верно ли, что если простой граф содержит точно одну вершину и не является нуль-графом, то он содержит цикл?

е. Верно ли, что если простой граф состоит из двух вершин и не является нуль-графом, то в нем нет циклов?

ж. Могут ли в цикле повторяться вершины кроме первой и последней?

з. Верно ли, что если в простом графе нет циклов, то в нем ребер столько же, сколько и вершин?

. . . .

3.5 Связность графа

Две вершины *v* и *w* графа *G* называются *связными*, если они соединены хотя бы одной простой цепью. Если же в графе нет ни одной цепи, соединяющей вершины *v* и *w*, то эти вершины называются *несвязными*. Например, вершины 1 и 6 (рис. 3.7) соединяет цепь 1, 7, 2, 6, следовательно, они являются связными. Пара вершин 2 и 3 к связным не относятся, так как ни одна цепь их не соединяет. Если в графе каждые две вершины связны, то такой граф называется *связным*. Если же граф содержит хотя бы одну пару несвязных вершин, то граф называется *несвязным*.

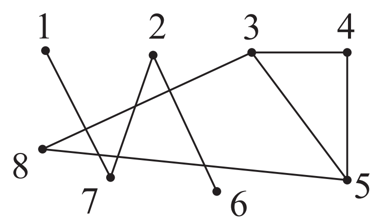


Рис. 3.7

Согласно этим определениям, граф, изображенный на рисунке 3.9, является связным, а графы, приведенные на рисунках 3.7 и 3.8, – несвязными.

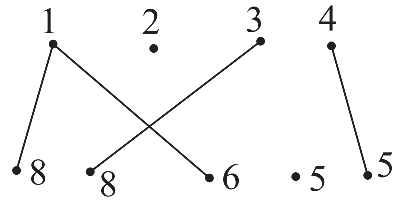


Рис. 3.8

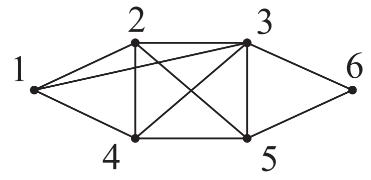
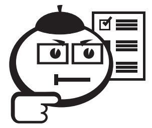


Рис. 3.9

Граф, приведённый на рисунке 3.7, состоит из двух компонент, где каждая компонента представляет собой связный граф. В графе (рис. 3.8) содержится 5 компонент.

(Необходимо заметить, что согласно нормам современного русского языка слово *компонент* относится к категории мужского рода [3]. Однако в математической литературе используется форма женского рода [47, с. 28; 14, с. 249; 33, с. 173; 8, с. 102; 51, с. 60].)

Число компонент, из которых состоит граф, называется *степенью связности*. Граф, изображённый на рисунке 3.7, имеет степень связности, равную 2. Степень связности графа, приведенного на рисунке 3.8, равна 5.



Упражнения

1. Укажите степень связности графа:

$$G = \{\{1,6\}, \{2,7\}, \{3,5\}, \{3,8\}, \{4,8\}, \{5,8\}\}.$$

2. Укажите степень связности дополнения графа:

$$G = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}\}.$$

3. На какие вопросы из следующих Вы дадите утвердительные ответы?

а. Может ли нуль-граф быть однокомпонентным?

б. Может ли простой граф быть однокомпонентным, если в нем 10 вершин и 8 ребер?

в. Верно ли, что простой граф на n вершинах, не содержащий ни одного ребра, имеет степень связности, равную n?

г. Из связного графа, в котором нет циклов, удалили одно ребро. Будет ли получившийся граф двухкомпонентным?

д. Может ли простой граф быть связным, если в нем 6 вершин и 5 ребер?

е. Может ли простой граф, содержащий *n* вершин и *n* ребер, иметь степень связности, равную *n*?

ж. Может ли граф быть связным, если он содержит восемь вершин и четыре ребра?

. . . .

3.6 Нахождение простых цепей в простом графе

Пусть задан простой граф. Выберем в нем какие-либо две вершины *v* и *w*. Задача состоит в том, чтобы найти все простые цепи, соединяющие эти вершины. Очевидно, что задача разрешима, если граф является связным. В случае несвязных графов задача также разрешима, но при этом возможны два варианта:

а) вершины *v* и *w* относятся к одной и той же компоненте. Очевидно, что все простые цепи будут проходить через вершины только этой компоненты;

б) вершины *v* и *w* входят в различные компоненты графа. В этом случае число простых цепей равно нулю.

Метод нахождения всех простых цепей (он является модификацией метода отыскания кратчайших путей [2]) рассмотрим на примере связного графа, приведенного на рисунке 3.9.

Допустим, что начальной является вершина 1, конечной – вершина 6. На первом этапе выясним, сколько существует способов выйти из первой вершины. Так как ее степень равна 3, то имеем три варианта: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4.

Из вершины 2 можно выйти в трех направлениях: к вершинам 3, 4, 5 (в вершину 1 не возвращаемся). Из вершины 3 движение возможно четырьмя способами, из вершины 4 – тремя. Таким образом, на втором этапе получаем:

1 – 2 – 3	1 – 3 – 2	1 – 4 – 2
1 – 2 – 5	1 – 3 – 4	1 – 4 – 3
1 – 2 – 4	1 – 3 – 5	1 – 4 – 5
	<u>1 – 3 – 6</u>	

Заметим, что одну простую цепь мы уже нашли (подчеркнута): 1 – 3 – 6. Остальные цепи имеют продолжение:

1 – 2 – 3 – 4	1 – 2 – 4 – 3	1 – 3 – 5 – 2	1 – 4 – 3 – 5
1 – 2 – 3 – 5	1 – 2 – 4 – 5	1 – 3 – 5 – 4	<u>1 – 4 – 3 – 6</u>

1 – 2 – 3 – 6	1 – 3 – 2 – 4	1 – 3 – 5 – 6	1 – 4 – 5 – 2
1 – 2 – 5 – 3	1 – 3 – 2 – 5	1 – 4 – 2 – 3	1 – 4 – 5 – 3
1 – 2 – 5 – 4	1 – 3 – 4 – 2	1 – 4 – 2 – 5	1 – 4 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 6	1 – 3 – 4 – 5	1 – 4 – 3 – 2	

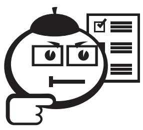
Найдено еще пять простых цепей (все они подчеркнуты). Остальные 18 цепей имеют продолжения:

1 – 2 – 3 – 4 – 5	1 – 3 – 2 – 4 – 5	1 – 4 – 2 – 3 – 6
1 – 2 – 3 – 5 – 4	1 – 3 – 2 – 5 – 4	1 – 4 – 2 – 5 – 3
1 – 2 – 3 – 5 – 6	1 – 3 – 2 – 5 – 6	1 – 4 – 2 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 3 – 4	1 – 3 – 4 – 2 – 5	1 – 4 – 3 – 2 – 5
1 – 2 – 5 – 3 – 6	1 – 3 – 4 – 5 – 2	1 – 4 – 3 – 5 – 2
1 – 2 – 5 – 4 – 3	1 – 3 – 4 – 5 – 6	1 – 4 – 3 – 5 – 6
1 – 2 – 4 – 3 – 5	1 – 3 – 5 – 2 – 4	1 – 4 – 5 – 2 – 3
1 – 2 – 4 – 3 – 6	1 – 3 – 5 – 4 – 2	1 – 4 – 5 – 3 – 2
1 – 2 – 4 – 5 – 3	1 – 4 – 2 – 3 – 5	1 – 4 – 5 – 3 – 6
1 – 2 – 4 – 5 – 6		

На четвертом этапе получили десять простых цепей. На пятом (последнем) получаем еще десять цепей. Они проходят через все вершины графа:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6	1 – 3 – 4 – 2 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 4 – 3 – 6	1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 6
1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6	1 – 4 – 2 – 5 – 3 – 6
1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 6	1 – 4 – 3 – 2 – 5 – 6
1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6	1 – 4 – 5 – 2 – 3 – 6

Таким образом, всего в графе (рис. 3.9) имеется 26 простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6. Из них одна цепь содержит два ребра, 5 цепей содержат по три ребра, 10 цепей – по четыре ребра и 10 цепей – по пять ребер.



Упражнения

1. Сколько простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6 и проходящих через вершину 2, содержит граф, приведенный на рисунке 3.9?

2. На основе графа (рис. 3.9) построили подграф, удалив вершину 2. Сколько ребер удалено? Сколько ребер в подграфе? Сколько простых цепей соединяют вершины 1 и 6 подграфа?

3. Простой граф задан следующим образом:

$G = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.

а. Сколько в этом графе простых цепей, соединяющих вершины 1 и 5?

б. Сколько среди них простых цепей длины 1? 2? 3? 4?

4. На какие вопросы Вы ответите «да»?

а. Во всяком ли простом связном графе самая длинная простая цепь проходит через все вершины графа?

б. Дан связный граф. Всякий ли его надграф является связным?

в. Верно ли, что в любом полном графе любые две его вершины соединяет одинаковое число простых цепей?

г. Существует ли простой связный граф, в котором каждые две вершины соединены точно двумя простыми цепями?

д. Всякий ли непустой подграф полного графа является полным?

е. Всякий ли частичный граф полного графа является связным?

. . . .

3.7 Двудольные графы

Пусть множество V вершин простого графа G состоит из двух непустых множеств V_1 и V_2, и пусть при этом выполняются условия:

$$V = V_1 \cup V_2; \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Если рёбра графа G соединяют вершины разных множеств, и при этом нет ни одного ребра, соединяющего вершины одного и того же множества, то такой граф называется *двудольным*. Иными словами: граф называется двудольным, если каждое ребро графа G соединяет некоторую вершину множества V_1 с какой-либо вершиной множества V_2. Пример двудольного графа приведен на рисунке 3.10. В этом графе

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad V_1 = \{1, 2, 3\}, \quad V_2 = \{4, 5, 6, 7\}.$$

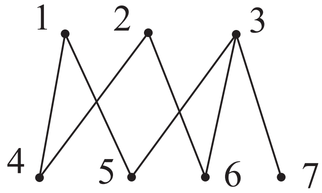


Рис. 3.10

Двудольный граф называется *полным*, если каждая вершина множества V_1 соединена с каждой вершиной множества V_2 точно одним ребром (рис. 3.11).

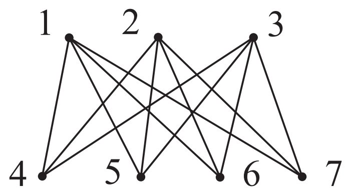


Рис. 3.11

Полный двудольный граф содержит K ребер, где

$$K = |V_1| \cdot |V_2|.$$

Степень любой вершины множества V_1 полного двудольного графа равна $|V_2|$. Степень каждой вершины множества V_2 равна $|V_1|$.

Дополнение полного двудольного графа есть несвязный граф, состоящий из двух компонент – полного графа G_1 и полного графа G_2. Обозначим:

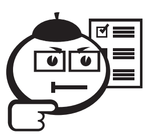
$$n = |V_1|; \quad m = |V_2|.$$

Тогда величины K_1 и K_2, определяющие число ребер компонент G_1 и G_2, равны:

$$K_1 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad K_2 = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Общее число K ребер дополнения полного двудольного графа равно:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{n^2 + m^2 - (n+m)}{2}.$$



Упражнения

1. Сколько ребер имеет полный двудольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 7$?

2. Дано: в полном двудольном графе 143 ребра. Определите $|V_1|$ и $|V_2|$, если

$$|V_1| > 1,\ |V_2| > 1,\ |V_1| > |V_2|.$$

3. В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, множества V_2 – 8. Сколько ребер в графе?

4. В некотором двудольном графе

$$|V_1| = 18,\ |V_2| = 10,$$

а число ребер равно 18. Найдите число ребер дополнения до полного двудольного графа.

5. Известно, что в связном двудольном графе

$$|V_1| = 7,\ \ |V_2| = 10.$$

Сколько ребер содержит граф, если при удалении из него любого ребра граф становится несвязным?

6. Укажите вопросы, на которые Вы ответите «да».

а. Может ли двудольный простой граф содержать петли?

б. Верно ли, что нуль-граф, содержащий 7 вершин, является двудольным?

в. Является ли двудольным граф, содержащий одну вершину?

г. Входит ли пустой граф в множество двудольных графов?

д. Может ли быть двудольным простой граф, содержащий 35 ребер?

е. Может ли быть связным двудольный граф, если в нём 12 рёбер и

$$|V_1| = 6,\ \ |V_2| = 7?$$

ж. Может ли быть связным двудольный граф, если в нём 14 рёбер и

$$V_1| = 10,\ \ |V_2| = 6?$$

з. Существуют ли связные двудольные графы, в которых все вершины множества V_1 являются четными, а все вершины множества V_2 – нечетными?

7. Укажите двудольные графы на рисунке 3.12.

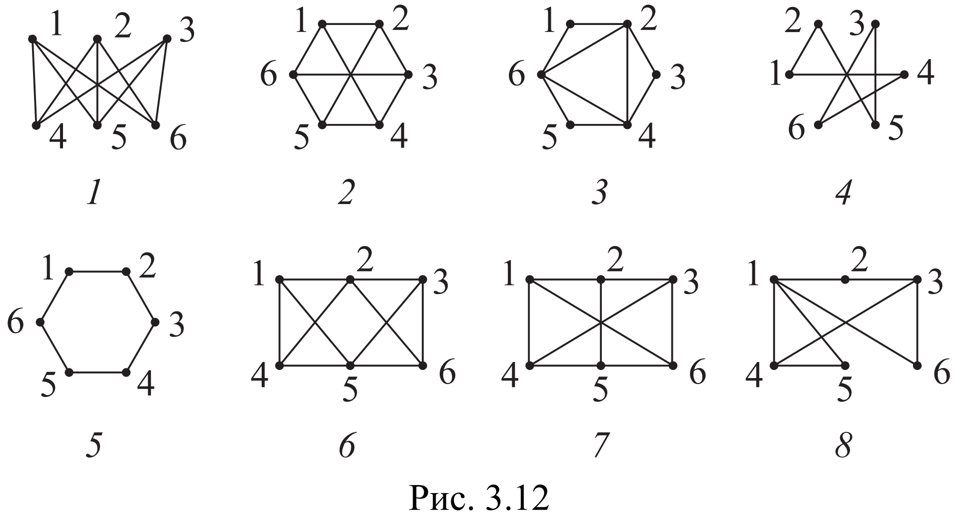


Рис. 3.12

8. Укажите номера полных двудольных графов, изображённых на рисунке 3.12.

. . . .

3.8 Двойственные графы

Граф называется *плоским*, если на плоскости он изображён так, что его рёбра пересекаются только в вершинах. Например, граф, изображённый на рисунке 3.13, является плоским, а тот же граф в ином изображении, как на рисунке 3.14, к плоским не относится, так как его ребра {1,3} и {2,4} пересекаются вне вершин. Граф называется *планарным*, если у него есть плоское изображение. Примером может служить граф на рисунке 3.14. Очевидно, что плоский граф одновременно является и планарным.

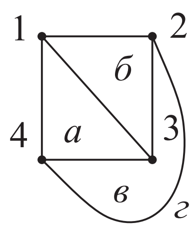


Рис. 3.13

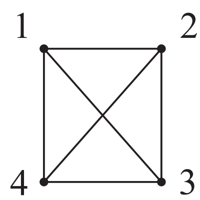


Рис. 3.14

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется *гранью*. Граф на рисунке 3.13 имеет четыре грани: три внутренних – *а*, *б*, *в* – и одну внешнюю (бесконечную), обозначенную буквой *г*. Бесконечную грань имеет любой плоский граф. Петля также образует грань. Например, на рисунке 3.15 грани *а* и *б* образованы петлями.

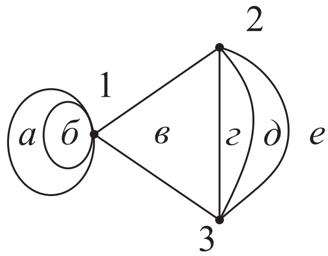


Рис. 3.15

Если параллельно какому-либо ребру графа провести одно ребро, то получим новую грань. Например, на рисунке 3.15 вершины 2 и 3 соединены тремя кратными рёбрами. Ограниченные ими участки плоскости дают грани *г* и *д*.

Двойственным по отношению к связному плоскому графу G называется граф G^*, построенный следующим образом:

1) в каждой грани заданного плоского графа ставится вершина графа G^*;
2) если какая-либо вершина графа G^* отделена точно одним ребром графа G от другой вершины графа G^*, то эти вершины соединяются ребром, относящимся к графу G^*.

Поясним это на примере. Пусть дан граф (рис. 3.16), содержащий четыре грани (из них одна – бесконечная). В каждой грани поставим по одной вершине графа G^*. Обозначим их буквами a, b, c, d. Находим ребра графа G^*. Вершина 5 является висячей. Ребру $\{4,5\}$ в графе G^* соответствует петля. Вершина a отделена от вершины d ребром $\{1,2\}$. Проводим ребро $\{a, d\}$ (на рис. 3.16 оно обозначено пунктиром). Вершина b отделена от вершины d ребром $\{2,4\}$, соединяем вершины b и d ребром $\{b, d\}$ и т. д.

На рисунке 3.17 изображен граф, двойственный по отношению к графу, приведённому на рисунке 3.16. Пусть n, r, q – число вершин, ребер и граней графа G соответственно; n^*, r^*, q^* – число вершин, ребер и граней графа G^*. Тогда очевидно, что справедливы следующие зависимости между числами n, r, q и n^*, r^*, q^*:

$$n^* = q, \ \ r^* = r, \ \ q^* = n.$$

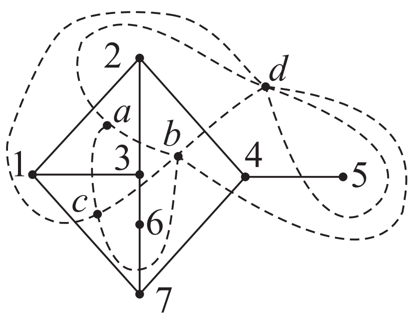


Рис. 3.16

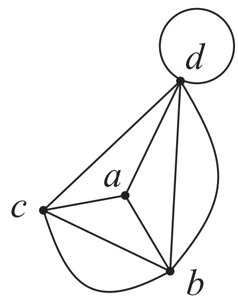
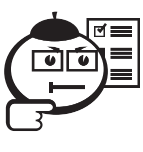


Рис. 3.17



Упражнения

1. Для графа, приведенного на рисунке 3.17, укажите, сколько вершин, ребер и граней имеет его двойственный граф?

2. Сколько вершин, ребер и граней имеет граф, двойственный графу, приведенному на рисунке 3.13?

3. Укажите номера графов, являющихся планарными (рис. 3.12).

4. Укажите номера графов, являющихся плоскими (рис. 3.12).

. . . .

3.9 Древовидные графы

Термин «дерево» для особой разновидности графов ввел в 1857 г. английский математик Артур Кэли (1821–1895), с 1870 г. иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Несвязный граф, не содержащий циклов, называется лесом. На рисунке 3.18 приведен трехкомпонентный лес. Первую компоненту этого леса образует дерево с вершинами 1,2,3,4, вторую – 5,6,7,8,9, третью – 10,11.

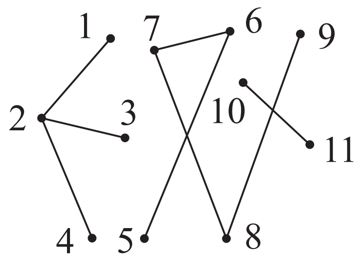


Рис. 3.18

Приведем без доказательств четыре теоремы о деревьях.

Теорема 1. Всякое дерево содержит $n - 1$ ребер, где n – число вершин.

Теорема 2. Всякий лес содержит $n - k$ ребер, где k – число компонент связности;

Теорема 3. Любые две вершины дерева соединены точно одной простой цепью.

Теорема 4. Если в дереве любые две вершины соединить ребром, то в графе появится один цикл.

Доказательства теорем можно найти в [33; 47].

Если связный граф содержит цикл, то после удаления любого ребра, входящего в цикл, этот цикл разрушается, но связность графа сохраняется. Применим операцию разрушения циклов к каждому циклу графа. Тогда в графе не останется циклов и получится связный частичный граф, являющийся деревом. Полученное дерево называется *о́стовом*. Значит, остов – это связный частичный граф данного связного графа G, содержащий все вершины графа G, но не содержащий циклов. Рассмотрим, например, граф, изображенный на рисунке 3.19. Удалим из него ребра $\{1,4\}$ и $\{3,4\}$. Получим остов (рис. 3.20). Если из графа (рис. 3.19) удалить ребра $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$, то получим другой остов (рис. 3.21), если удалить рёбра $\{1,4\}$ и $\{2,4\}$, то получим ещё один остов (рис. 3.22), и т. д.

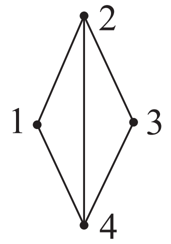


Рис. 3.19

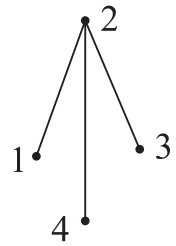


Рис. 3.20

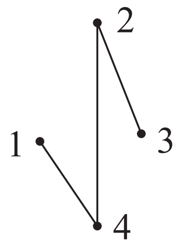


Рис. 3.21

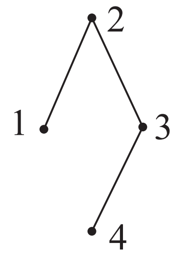


Рис. 3.22

Наименьшее число z, показывающее, сколько ребер необходимо удалить из графа, чтобы получить его остов, называется *цикломатическим числом*. Если n – число вершин, m – число ребер, k – число компонент, то

$$z = m - n + k,$$

т. е. чтобы найти цикломатическое число произвольного графа, необходимо из числа ребер вычесть число вершин и к результату прибавить число компонент.

В случае связного графа $k = 1$, следовательно,

$$z = m - n + 1.$$

Например, для графа, приведенного на рисунке 3.19, значения m, n и z равны:

$$m = 5; \quad n = 4; \quad z = 5 - 4 + 1 = 2.$$

Упражнения

1. Найдите цикломатическое число графа, изображенного на рисунке 3.18.

2. В связном графе 18 вершин. Сколько ребер содержит его остов?

3. В нуль-графе 38 вершин. Каково наименьшее число ребер, которые необходимо в него ввести, чтобы получить связный граф?

4. В дерево из 25 вершин ввели 4 ребра. Сколько ребер в новом графе?

5. В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?

6. Сколько ребер необходимо удалить из дерева, содержащего 20 ребер, чтобы получился лес из 15 деревьев?

7. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что

1) цикломатическое число дерева равно нулю?

2) всякое дерево является планарным графом?

3) число z полного графа на n вершинах можно найти по формуле

$$z = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}?$$

4) формула для цикломатического числа справедлива для непланарных графов?

5) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для псевдографов?

6) одновершинный граф с одной петлей является деревом?

7) изолированная вершина может быть компонентой леса?

8) граф, в котором число ребер равно числу вершин, может быть деревом?

3.10 О прикладных аспектах теории графов

Теории графов в современной дискретной математике уделяется очень большое внимание. Её теоретические и прикладные вопросы рассматриваются не только в публикациях, посвященных графам [47; 52], но и во многих (если не в большинстве) учебных пособиях по дискретной математике, например [1; 8; 14; 28; 32; 33; 35; 38; 40; 51; 57]. С их помощью решаются следующие задачи:

а) нахождение инверсных контактных структур;
б) представление контактных структур в виде сети электронных логических элементов.

Вообще же необходимо отметить, что, как уже отмечалось в начале данного раздела, теория графов отличается очень большими возможностями по её применению в различных областях науки, особенно в многочисленных разделах дискретной математики, где благодаря графам обеспечивается высокая степень наглядности в процессе решения многих задач из области дискретных структур.

Пример 3.1

1. Задача о раскраске географических карт. Эта задача известна в литературе под названием проблемы (гипотезы) четырёх красок [14; 35; 47; 52]. В [52] она формулируется следующим образом: «*Раскраской плоской карты G* называется такое приписывание цветов областям в *G*, что никакие две смежные области не получают одинакового цвета» [52, с. 156]. Почти так же формулируется она в терминах теории графов: «*Раскраской* графа называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета» [52, с. 152].

2. С развитием цифровой техники возникла проблема печатного монтажа. В её решении нашла применение теорема (критерий) Понтрягина – Куратовского [14; 52; 57], позволяющая определить, существует ли возможность выполнить печатный монтаж только на одной стороне печатной платы.

3. В [28, с. 186] перечислены задачи, которые решаются на основе алгоритма нахождения максимального потока в графовой модели: транспортная задача (о перевозе с минимальными затратами каких-либо грузов); задача о спросе и предложении (о стратегии, при которой торговец получит максимальную прибыль); задача о кратчайшем пути (о поиске пути с минимальной стоимостью проезда); задача об оптимальном использовании дорог; задачи о складе, об оптимальном назначении, о поставщике и многие другие.

Кроме того, можно отметить такие направления в применении теории графов, как решение головоломок, теория игр, установка соответствий, теория математических отношений, построение генеалогических деревьев и т. п.

Все их следовало бы отразить в данном пособии, т. е. показать, как именно применяются графы, например, в решении задач лингвистики, биологии, психологии, теории игр и др., привести примеры. Но для этого сведений только из одной теории графов недостаточно, требуется ещё изучить соответствующие разделы науки, т. е. лингвистику, биологию, психологию, теорию игр и др. Изложить их в одной книге даже на минимально необходимом уровне совершенно нереально. Поэтому в данном пособии применение графов показано лишь на примерах из области синтеза дискретных структур.

4 Булева алгебра

4.1 Вводные понятия

В булевой алгебре, известной также под названием *алгебры логики*, широко применяется *двоичная система счисления*.

Для перевода десятичного числа в двоичную систему можно пользоваться методом деления на 2. Проиллюстрируем это на примере числа 40:

40 – 0 – цифра младшего разряда
20 – 0
10 – 0
5 – 1
2 – 0
1 – 1 – цифра старшего разряда

Каждое следующее число, записанное в левой колонке, меньше предыдущего в два раза. Если число не делится на два, то оно уменьшается на единицу. В колонке справа единицами отмечены нечётные числа, нулями – чётные. Читая снизу вверх цифры правой колонки, получаем искомое двоичное число:

$$40\big|_{10} = 101000\big|_{2},$$

где индекс 10 в выражении $40\big|_{10}$ говорит о том, что 40 – это десятичная запись, а цифра 2 в числе $101000\big|_{2}$ обозначает: число 101000 является двоичным.

Для проверки выполним обратный перевод в десятичную систему найденного двоичного числа 101000, воспользовавшись полиномом вида

$$N = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0,$$

где n – количество знаков в двоичном числе; a_0 – цифра младшего разряда.

Из записи двоичного числа 101000 находим величины, необходимые для применения полинома N:

$$n = 6; \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = 0; \quad a_3 = a_5 = 1.$$

Следовательно,

$$101000\big|_{2} = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 32 + 8 = 40\big|_{10}.$$

В алгебре логики операции выполняются над высказываниями. *Высказывание* – это повествовательное предложение, по смысловому содержанию которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обычно высказывания обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Например, пусть A – это высказывание «Петров купил дога». Если оно истинно, то пишут $A = 1$. Соответственно запись $A = 0$ обозначает: высказывание «Петров купил дога» ложно. Знаки 0 и 1 обычно называют *константами* алгебры логики.

Всякая буква, обозначающая высказывание, – это переменная величина, принимающая одно значение из двух – либо 0, либо 1. Такую переменную называют *двоичной* (*высказывательной* переменной, согласно [33]). Двоичная переменная определяется аксиомами вида [23]:

$$A = 1, \text{ если } A \neq 0; \quad A = 0, \text{ если } A \neq 1.$$

Согласно этим записям, аксиоматически принимается, что в булевой алгебре никаких значений истинности, кроме «истина» и «ложь», не существует.

В булевой алгебре обычно приходится иметь дело со многими переменными, каждая из которых может принимать значения из множества $\{0, 1\}$. Их упорядоченные последовательности условимся называть *наборами* значений переменных, или просто наборами [51]. В соответствии с основным правилом комбинаторики всего возможно 2^n наборов. Например, в случае трёх переменных A, B и C число наборов равно 8. Запишем некоторые из них:

$$A = 0, B = 0, C = 0; \quad A = 0, B = 0, C = 1; \quad A = 1, B = 0, C = 1.$$

Если заранее договориться о порядке расположения букв (по алфавиту, по возрастанию цифровых индексов и др.), то в записи наборов можно указывать только цифры. Например, для трёх переменных перечень наборов имеет вид:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Значения переменных по сокращённой записи набора определяются однозначно, например (при алфавитном порядке расположения букв):

Набор: 1 0 1

Переменные: A B C

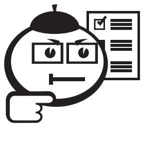
Из этих двух записей видно, что $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$.

Наборы – это упорядоченные n-значные последовательности нулей и единиц. Их можно рассматривать как двоичные числа и записывать не только в двоичной системе, но и в десятичной.

Из всех 2^n наборов будем выделять:

1) *нулевой набор*, в нём n нулей, т. е. нет ни одной единицы;

2) *единичный набор*, содержащий n единиц при отсутствии нулей [12; 40].



Упражнения

1. Замените троеточия двоичными знаками, если набор имеет вид 10011:

$A = \ldots;\quad B = \ldots;\quad C = \ldots;\quad D = \ldots;\quad E = \ldots .$

2. Сколько существует наборов шести переменных, в каждом из которых:

1) точно три единицы?

2) две единицы и четыре нуля?

3) два нуля и четыре единицы?

4) нулей столько же сколько и единиц?

3. Список переменных содержит 10 букв. Сколько существует наборов значений этих переменных, если в каждом наборе:

1) содержится хотя бы один нуль и хотя бы одна единица?

2) содержится не менее двух нулей и не менее двух единиц?

. . . .

4.2 Логические операции и формулы

В булевой алгебре применяются операции *дизъюнкции*, *конъюнкции* и *инверсии*, обозначаемые логическими знаками с теми же названиями.

Дизъюнкция, называемая также *логическим сложением*, *логической суммой*, *операцией ИЛИ*, определена следующими аксиомами:

$$0 + 0 = 0; \tag{4.1}$$

$$0 + 1 = 1; \tag{4.2}$$

$$1 + 0 = 1; \tag{4.3}$$

$$1 + 1 = 1, \tag{4.4}$$

где знак «+», согласно символике Пирса [10; 21], обозначает операцию дизъюнкции. В литературе для обозначения дизъюнкции нередко используется знак «$\vee$» из символики Пеано – Рассела, но он менее удобен в преобразованиях булевых формул, поэтому в данной книге не применяется. При помощи операции дизъюнкции из двух простых высказываний A и B образуется новое, более сложное, высказывание $A + B$. Читается запись «A или B». Согласно аксиомам (4.1)–(4.4), дизъюнкция равна единице, если истинным является высказывание A, или высказывание B, или оба вместе.

Конъюнкция (*логическое умножение*, *операция И*) определяется аксиомами вида:

$$0 \cdot 0 = 0; \tag{4.5}$$

$$0 \cdot 1 = 0; \tag{4.6}$$

$$1 \cdot 0 = 0; \tag{4.7}$$

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad (4.8)$$

где точка обозначает операцию конъюнкции. Вместо точки можно ставить знак & (амперсанд). И в этом случае из двух простых высказываний A и B образуется новое, более сложное, высказывание $A{\cdot}B$. Читается: «A и B». Знак конъюнкции можно не указывать. В дальнейшем будем полагать, что если между стоящими рядом буквами нет никакого знака, то они образуют конъюнкцию:

$$AB = A{\cdot}B = A \mathbin{\&} B.$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции *коммутативны*:

$$A + B = B + A;$$

$$AB = BA,$$

и *ассоциативны*:

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(AB)C = A(BC),$$

что позволяет удалять скобки во всех случаях, когда знаками дизъюнкции или конъюнкции соединяются более двух переменных:

$$(A + B) + C = A + B + C; \quad (AB)C = ABC.$$

Кроме того, операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойствами *дистрибутивности*:

1) *конъюнкция дистрибутивна* относительно дизъюнкции:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, например:

$$A(B + C + D + E) = AB + AC + AD + AE,$$

и выносить общий множитель за скобки:

$$ABC + ABD + ABEF = AB(C + D + EF);$$

2) *дизъюнкция дистрибутивна* относительно конъюнкции:

$$A + BC = (A + B)(A + C).$$

Отметим ещё два свойства операций дизъюнкции и конъюнкции:

$$A + A = A; \quad A{\cdot}A = A.$$

Третья операция – *инверсия* (в литературе её называют также операцией *отрицания*, *операцией НЕ*). Инверсия определяется аксиомами вида

$$\overline{1} = 0, \qquad (4.9)$$

$$\overline{0} = 1, \qquad (4.10)$$

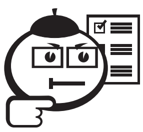
где черта, поставленная над единицей в (4.9) и над нулём в (4.10), обозначает операцию инверсии. Запись (4.9) читается следующим образом: отрицание истины есть ложь. Запись (4.10): отрицание лжи есть истина. При помощи операции инверсии образуется новое высказывание: $\overline{A}$. Читается: «не *A*».

В дальнейшем будем различать *прямые переменные* и *инверсные*: прямые переменные не содержат знаков инверсии, а в записи инверсных переменных всегда ставится знак отрицания. Если к прямой переменной применить операцию инверсии, то получим инверсную переменную. Если же операцию отрицания применить к инверсной переменной, то получим прямую переменную (закон инволюции):

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

При помощи двоичных переменных, булевых констант и логических операций И, ИЛИ, НЕ строятся булевы формулы. Понятие формулы в пределах операций дизъюнкции, конъюнкции и инверсии определяется следующим образом [4; 18]:

1) константы 0 и 1, а также двоичные переменные *A*, *B*, *C*, … являются булевыми формулами;
2) если *A* – формула, то и $\overline{A}$ – формула;
3) если *P* и *Q* – булевы формулы, то и *P* + *Q* и *PQ* – формулы;
4) любые другие последовательности перечисленных знаков формулами не являются.



Упражнения

1. Укажите номера формул из следующих выражений.

1) $\overline{\overline{\overline{A}}}$; 2) $\overline{A} + \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}$; 3) $\overline{A} + \overline{\overline{1}} + 0$; 4) $A + A = +$; 5) $\overline{A} \cdot A +$.

2. Какие из следующих выражений не являются булевыми формулами?

1) $\overline{A} + 1 + 0$; 2) $\overline{A}A + 1 - 1 + B$; 3) 1 + 1 + 0; 4) *CCC* + · *C*; 5) 1 + + 0.

3. В нижеприведённом списке укажите номера булевых формул:

1) *A* + *B* + + *C*; 2) *AB* + *AB* + *CC*; 3) $\overline{A}\overline{A} + \overline{A}$;
4) *A* – *B* + *C*; 5) + *AB*+ *C*.

4.3 Нормальные формы булевых выражений

Булевы формулы могут быть представлены дизъюнкцией конъюнкций переменных или констант (прямых или инверсных) либо конъюнкцией дизъюнкций тех же переменных и констант. Такие формы называются *нормальными*.

Булева формула, представленная в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых есть константа, или отдельный аргумент (с инверсиями или без инверсий), или конъюнкция аргументов, где те или иные аргументы также могут содержать знаки инверсии, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Например, выражения

$$AB + C\overline{D}; \quad A + \overline{B} + 1 \cdot D\overline{E}; \quad A + 1 + 0 + \overline{D}$$

представлены в ДНФ, а формула вида

$$A + B(C + \overline{D})$$

к ДНФ не относится, так как второе слагаемое $B(C + \overline{D})$ не является ни константой, ни отдельным аргументом, ни конъюнкцией переменных.

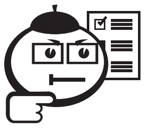
Булева формула, записанная в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо константу, либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов (также с инверсиями или без инверсий), называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). Например, выражения

$$(A + \overline{B})(C + \overline{A} + D); \quad AB(C + 1 + \overline{E})$$

записаны в КНФ, а формула $(A + \overline{B}C)(D + E)$ конъюнктивной нормальной формой не является, поскольку в первой паре скобок содержится конъюнкция $\overline{B}C$.

Выражения вида 1 и 0, а также всякая формула, представленная отдельным аргументом или его инверсией, либо дизъюнкцией или конъюнкцией нескольких прямых или инверсных переменных, одновременно входят в класс ДНФ и КНФ. Например:

$$A; \quad \overline{D}; \quad 1; \quad B + C + D; \quad ABC; \quad 0; \quad B + \overline{C} + \overline{E} + F; \quad A\overline{C}E\overline{F}.$$



Упражнения

1. Укажите номера формул, относящихся к классу ДНФ.

1) $A + \overline{B}$; 2) $\overline{D}$; 3) $(1 + A)B$; 4) $B + (C + D)E$; 5) ABC; 6) 0; 7) $1 + 0 + 1$.

2. Укажите номера формул, представленных в ДНФ.

1) $A + A(B + C)$; 2) $AB + ABA$; 3) $B + CA$; 4) $A + A(A + A)$; 5) $AA + A$.

3. Какие формулы из следующего списка представлены в КНФ?

1) $1 + \overline{B}$; 2) $\overline{D}$; 3) $(1 + A)B$; 4) $B + (C + D)E$; 5) ABC; 6) 0; 7) $1 + 0 + 1$.

4. Укажите номера формул, представленных в КНФ.

1) $AB + C\overline{D}$; 2) $A + B + C$; 3) $A + BC + \overline{E}$; 4) $P + Q(P + R)$; 5) $A + A$.

5. Какие формулы из следующего списка относятся к обоим классам ДНФ и КНФ?

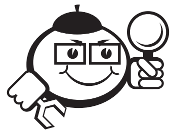
1) $\overline{B}$; 2) $\overline{D}(1 + C)$; 3) $(\overline{C} + A)B$; 4) $1 + (C + D) \cdot 0$; 5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; 6) $1 \cdot 1$; 7) $(A + 0 + 1) \cdot 0$.

6. Укажите номера формул, относящихся одновременно к ДНФ и КНФ.

1) A; 2) AA; 3) AB; 4) $A + \overline{A}$; 5) $A + BC$.

4.4 Вычисление значений булевых формул

При помощи аксиом дизъюнкции, конъюнкции и инверсии можно найти значение любой булевой формулы. При этом в ДНФ первыми выполняются операции инверсии, если они стоят только над переменными. После инверсии выполняются операции конъюнкции, а затем – дизъюнкции.



Пример 4.1

На наборе 0110 найти значение формулы

$$\overline{A}B + BCD + A\overline{B}C. \tag{4.11}$$

Запишем переменные под знаками заданного набора, расположив буквы в алфавитном порядке. Тогда значения переменных примут вид:

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0.$$

Подставим эти значения в формулу (4.11):

$$\overline{0} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot \overline{1} \cdot 1.$$

Выполнив операции инверсии, а затем умножения и сложения, получим:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Таким образом, на наборе 0110 формула (4.11) принимает значение 1.

В КНФ первыми выполняются также операции инверсии, а после них – дизъюнкции и затем – конъюнкции.

Пример 4.2

На наборе 1110 найти значение формулы

$$(\overline{A}+B+C)(\overline{B}+\overline{C}+D)(A+C+\overline{D}).$$

Подставим в эту формулу значения переменных согласно набору 1110:

$$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=0.$$

В результате получаем:

$$(\overline{1}+1+1)(\overline{1}+\overline{1}+0)(1+1+\overline{0})=1\cdot 0\cdot 1=0.$$

На наборе 1110 заданная формула принимает нулевое значение.

В общем случае знаки инверсии в булевых формулах могут стоять не только над отдельными переменными, но и над более сложными выражениями. Такие знаки условимся называть длинными инверсиями. При вычислении значений формул, содержащих длинные знаки инверсии, необходимо учитывать одну особенность: если в формуле имеется «длинная» инверсия, то сначала необходимо найти значение выражения, находящегося под длинной чертой.

Пример 4.3

На наборе 11100 найти значение формулы

$$E\,\overline{A+\overline{B}CD}+A\overline{B}C.$$

Согласно набору 11100 значения переменных равны:

$$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=0,\ E=0.$$

Эти значения подставляем в заданную формулу:

$$0\cdot\overline{1+\overline{1}\cdot 1\cdot 0}+1\cdot\overline{1}\cdot 1.$$

Под длинной чертой выражение равно 1, следовательно:

$$0\cdot\overline{1}+1\cdot\overline{1}\cdot 1=0.$$

Таким образом, на наборе 11100 заданное выражение равно нулю.

Различают три типа булевых формул в зависимости от результатов их вычисления на всех возможных наборах значений переменных:

1) *тождественно ложные.* Эти формулы принимают нулевое значение на всех наборах значений переменных [8; 11; 33]. В [20] их называют *противоречиями*, а в [22] – *невыполнимыми*. Например, выражение

$$(\bar{A}+\bar{B})(A+C)(\bar{B}+\bar{C})(B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)$$

на всех наборах равно нулю, следовательно, оно описывает тождественно ложное высказывание;

2) *тождественно истинные* (*общезначимые, тавтологии* [22; 30]). В [20; 33] их называют *логическими законами*. Они описывают утверждения, принимающие единичное значение на всех наборах значений переменных [9; 11; 33]. Примером может служить выражение вида

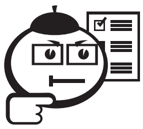
$$\bar{A}B\bar{C}+A\bar{C}+BC+\bar{B}.$$

Оно равно единице на всех восьми наборах значений переменных A, B, C, т. е. это выражение есть тавтология;

3) *выполнимые формулы* – это такие формулы, которые равны нулю не на всех наборах значений переменных [25]. Например, выражение

$$\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}D\,79$$

равно единице на трёх наборах: 0101, 0111, 1101, а на остальных тринадцати наборах равно нулю, следовательно, оно входит в класс выполнимых формул.



Упражнения

1. Найдите значения выражений:

1) $0\cdot\bar{0}+\bar{0}\cdot\bar{\bar{0}}+\bar{1}+\bar{\bar{1}}\cdot\bar{0}$; $1\cdot1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}\cdot\bar{\bar{1}}+1\cdot\bar{0}\cdot1\cdot0$; $1\cdot\bar{1}\cdot\bar{\bar{1}}+\bar{0}\cdot\bar{\bar{1}}+\bar{0}\cdot1\cdot\bar{1}$;

2) $0\cdot0\cdot\bar{1}+1\cdot1\cdot\bar{0}+0\cdot\bar{1}\cdot\bar{\bar{1}}$; $0\cdot1\cdot1+\bar{1}\cdot\bar{1}\cdot\bar{0}+\bar{0}\cdot\bar{0}\cdot\bar{1}$;
$1\cdot1\cdot\bar{\bar{0}}+0\cdot\bar{\bar{1}}\cdot0+\bar{0}\cdot\bar{\bar{1}}\cdot\bar{1}$;

3) $\bar{0}\cdot\bar{\bar{1}}\cdot0+1\cdot\bar{0}+0\cdot1$; $1\cdot0+\bar{0}\cdot1\cdot0+0\cdot\bar{1}$; $1\cdot\bar{0}\cdot\bar{1}+\bar{\bar{0}}\cdot\bar{1}+\bar{\bar{1}}\cdot\bar{\bar{0}}$;

4) $0\cdot0\cdot\bar{1}+1\cdot1\cdot\bar{0}+0\cdot\bar{1}\cdot\bar{\bar{1}}$; $0\cdot1\cdot1+\bar{1}\cdot\bar{1}\cdot\bar{0}+\bar{0}\cdot\bar{0}\cdot\bar{1}$;
$1\cdot1\cdot\bar{\bar{0}}+0\cdot\bar{\bar{1}}\cdot0+\bar{0}\cdot\bar{\bar{1}}\cdot\bar{1}$.

2. Найдите значения выражений:

1) $A\bar{B}C+BD$ на наборах 0010, 1010, 1110, 0110;

2) $A+\bar{B}\bar{C}+D$ на наборах 1011, 0010, 1000, 0100;

3) $A+\bar{B}D$ на наборах 0110, 1011, 1100, 0111;

4) $(A+\bar{B})(A+\bar{C})$ на наборах 0101, 1001, 0001, 0111.

4.5 Основные теоремы алгебры логики

Сначала приведём список теорем одной переменной:

$$A + 0 = A; \tag{4.12}$$

$$A + 1 = 1; \tag{4.13}$$

$$A + A = A; \tag{4.14}$$

$$A + \overline{A} = 1; \tag{4.15}$$

$$A \cdot 0 = 0; \tag{4.16}$$

$$A \cdot 1 = A; \tag{4.17}$$

$$A \cdot A = A; \tag{4.18}$$

$$A \cdot \overline{A} = 0; \tag{4.19}$$

$$\overline{\overline{A}} = A. \tag{4.20}$$

При их доказательстве можно пользоваться аксиомами (4.1)–(4.10). Докажем, например, теорему (4.15). Если принять $A = 0$, то получим $0 + 1 = 1$, что соответствует аксиоме (4.2). Если принять $A = 1$, то получим $1 + 0 = 1$, что соответствует аксиоме (4.3). В обоих случаях отклонений от аксиом не наблюдается, следовательно, теорема (4.15) верна.

Из теорем большего числа переменных рассмотрим теоремы поглощения, склеивания и де Моргана. Первые две теоремы позволяют уменьшить число букв в записи формул. От применения теоремы де Моргана число букв не меняется.

Формы *теоремы поглощения*:

$$A + AB = A; \tag{4.21}$$

$$A(A + B) = A. \tag{4.22}$$

В эти выражения входят по две переменные, а после упрощения осталось по одной. Переменная B является *фиктивной*: если её заменить нулём или единицей, то равенства (4.21) и (4.22) не изменятся.

Докажем теорему (4.21). Вынесем за скобки букву A: $A + AB = A(1 + B)$.

Согласно теореме (4.13), $1 + B = 1$, следовательно, $A(1 + B) = A \cdot 1 = A$.

Чтобы доказать теорему (4.22), раскроем скобки:

$$A(A + B) = A \cdot A + AB = A + AB.$$

Получилось выражение, только что доказанное.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы поглощения:

$$ABC + BC = BC(A + 1) = BC;$$

$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}B\overline{C}(1 + D) = \overline{A}B\overline{C};$$

$$A + AB + ABC = A + AB(1 + C) = A + AB = A;$$

$$A(A + B + CD) = A + AB + ACD = A(1 + B + CD) = A\ ;$$

$$B(A + B + CD) = AB + B + BCD = B(A + 1 + CD) = B.$$

Теорема склеивания также имеет две формы – дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB + A\overline{B} = A; \tag{4.23}$$

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A. \tag{4.24}$$

Докажем теорему (4.23):

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A,$$

поскольку согласно теоремам (4.15) и (4.17)

$$B + \overline{B} = 1; \quad A \cdot 1 = A.$$

Чтобы доказать теорему (4.24), сначала раскроем скобки:

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A + A\overline{B} + AB + B\overline{B}.$$

По теореме (4.19) $B\overline{B} = 0$, следовательно, $A + A\overline{B} + AB + B\overline{B} = A + A\overline{B} + AB$.

Согласно теореме поглощения, $A + A\overline{B} + AB = A(1 + \overline{B} + B) = A$.

Приведём три примера на применение теоремы склеивания:

$$\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = \overline{A}(\overline{B} + B) = \overline{A};$$

$$A\overline{B}C + ABC = AC(\overline{B} + B) = AC;$$

$$(AB + C)(AB + \overline{C}) = AB + AB\overline{C} + ABC + C\overline{C} = AB.$$

Две формы имеет и *теорема де Моргана*. Первая читается следующим образом: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий:

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}; \ \overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}. \tag{4.25}$$

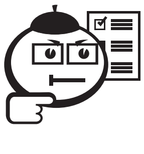
Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий:

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}; \ \overline{A + B + C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}. \tag{4.26}$$

Формулы (4.25) и (4.26) применимы и к более сложным выражениям:

$$\overline{(\overline{A} + \overline{B})(B + \overline{C})(\overline{A} + C + \overline{D})} = AB + \overline{B}C + A\overline{C}D;$$

$$\overline{A + B + \overline{C}D} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{\overline{C}D} = \overline{A}\,\overline{B}(C + \overline{D}).$$



Упражнения

1. Примените теорему поглощения: $A + A\overline{B}$; $K + KP$.

2. Упростите выражения, применив теорему поглощения:

1) $PQ+SPQ+PQRST$; 3) $ABC\overline{D}+ABCD+ABC$;

2) $XYZ+XZ+XZV$; 4) $A\overline{B}CD+AD+A\overline{B}\,\overline{C}D.$

3. Упростите:

1) $(\overline{\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})AB$; 5) $A+B+C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

2) $(A+B+C)(B+A+C)\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$; 6) $\overline{A+B+C}+A+B+C$;

3) $\overline{\overline{A+B}+C}+A\overline{C}+\overline{\overline{B}C\overline{D}}+\overline{B}C$; 7) $\overline{A+B+\overline{A}\,\overline{B}}\,(C+D)$;

4) $A+AB+ABC+BC+B$; 8) $(A+AB+ABC)\overline{A}.$

. . . .

4.6 Понятие булевой функции

В наиболее общем случае функция (лат. *functio* – исполнение, соответствие, отображение) – это некоторое правило (закон), в соответствии с которым каждому элементу множества X, представляющего собой область значений независимого переменного x, ставится в соответствие определенный элемент множества F, под которым понимается область значений зависимого переменного f. В случае булевых функций

$$X=F=\{0{,}1\}.$$

В [14; 20] такие функции называются переключательными. Правилом, при помощи которого задается булева функция, может служить любая булева формула, например:

$$f(A,B,C)=A\overline{B}+C.$$

Это аналитический (алгебраический) способ задания булевой функции. Символом f здесь обозначена *функция*, а буквами A, B, C – двоичные переменные, называемые логическими аргументами. *Аргументы* – независимые переменные, они могут принимать одно из двух значений – либо 0, либо 1. Функция же f зависимая переменная. Её значение полностью определяется значениями переменных и логическими связями между ними.

Существует ещё один способ задания булевых функций – *табличный*. В общем случае таблица содержит 2^n строк, где n – число аргументов функции. В таблице перечисляются все возможные наборы значений аргументов, и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют *таблицей соответствия* (*истинности*). Если функция задана аналитически, то для неё всегда можно построить таблицу истинности. Поясним это на примере функции

$$f = A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}B\overline{C}.$$

Функция зависит от трёх аргументов A, B, C. Следовательно, в таблице соответствия предусматриваем три колонки для значений аргументов и одну колонку для значений функции (табл. 4.1). Для удобства работы с таблицей слева от колонки A расположим вспомогательную колонку, обозначив её «№». В ней будем записывать десятичные эквиваленты трёхразрядных наборов значений аргументов, записанных в строках таблицы.

Таблица 4.1

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Так как в данном случае $n = 3$, то в таблице содержится $2^3 = 8$ строк. Заполняем таблицу. В строке с номером 000 записано:

$$A = B = C = 0.$$

Значение функции на этом наборе равно нулю. В колонке f на пересечении со строкой 000 записываем нуль.

Следующий набор 001: $A = B = 0,\ \ C = 1$. На этом наборе:

$$f = 0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 \cdot \overline{1} = 1.$$

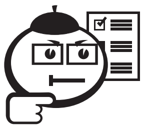
Следовательно, в строке с номером 001 на пересечении с колонкой f записываем единицу. Аналогично вычисляем значения функции на всех остальных наборах.

Для булевых выражений характерна двойственность, суть которой в том, что всякой булевой формуле f можно поставить в соответствие формулу f_1, получаемую заменой в f всех знаков дизъюнкции знаками конъюнкции и всех знаков конъюнкции знаками дизъюнкции. Например, для выражения

$$f = A\overline{B}C + ABD + ABE\overline{F}$$

двойственной является формула

$$f_1 = (A + \overline{B} + C)(A + B + D)(A + B + E + \overline{F}).$$



Упражнения

1. Функцию $f(A,B,C) = A\overline{B} + B\overline{C}$ представьте в виде таблицы соответствия. Сколько единиц содержится в колонке f? Сколько нулей в колонке f?

2. Функция $f = AB$ представлена в виде таблицы соответствия трёх аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в колонке f?

3. В таблице соответствия пяти аргументов колонка f содержит 19 единиц. Сколько нулей в колонке f?

4. Найдите десятичные эквиваленты наборов, на которых $f(A,B,C) = 1$:

1) $f(A,B,C) = \overline{A}BC + AB\overline{C}$;   3) $f(A,B,C) = BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

2) $f(A,B,C) = AB + \overline{A}\overline{B}C$;   4) $f(A,B,C) = AB + AC$.

4.7 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Существуют булевы функции, равные единице только на одном наборе значений аргументов. В таблице соответствия эта единица может находиться в любой строке, следовательно, таких функций существует 2^n, столько же, сколько строк в таблице истинности. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n аргументов, инверсных, неинверсных или их сочетаний, причём распределение инверсий находится в строгом соответствии с двоичной записью набора. Например, пусть функция, зависящая от аргументов A, B, C, D, равна единице на наборе 0101, а на всех остальных наборах равна нулю. Представим функцию в аналитической форме. Для этого запишем аргументы в алфавитном порядке, а под ними – цифры набора:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Буквы, под которыми находятся нули, инвертируем и получаем искомое выражение:

$$f = \overline{A}B\overline{C}D.$$

Если построить таблицу соответствия для этой функции, то в колонке f будет записана только одна единица – в строке с номером 5. Это десятичный номер набора 0101.

. . . .

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе, имеют в булевой алгебре важнейшее значение, поэтому получили специальное наименование и обозначение. Называют их минимальными термами, а коротко – ***минте́рмами*** [4; 48].

. . . .

У минтермов существует и определение: минтермом n аргументов называется такая конъюнкция их, в которую каждый аргумент входит один раз в прямой или инверсной форме [48].

Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма. Двоичный эквивалент номера минтерма – это набор, на котором минтерм равен единице. Рассмотрим, например, минтерм трёх переменных с номером 6. Двоичный эквивалент числа шесть имеет вид 110. На этом наборе минтерм m_6 равен единице. Следовательно, $m_6 = AB\overline{C}$.

Минтермы обладают свойством: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. Это следует из того, что два минтерма могут отличаться только инверсиями аргументов, т. е. если минтермы не равны, то всегда найдётся переменная, которая в один минтерм входит в прямой форме, а в другой – с отрицанием, конъюнкция которых равна нулю. Например, если $n = 4$, то

$$m_{12} \cdot m_5 = AB\overline{C}\,\overline{D} \cdot \overline{A}B\overline{C}D = 0.$$

Если таблица соответствия содержит только одну единицу в колонке f, то функция представляет собой минтерм. Если же в колонке f содержится несколько единиц, то функцию образует дизъюнкция соответствующих минтермов. Такой случай представлен в таблице 4.2. В ней единицы расположены в строках 2 и 5, следовательно,

$$f = m_2 + m_5 = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C.$$

Таблица 4.2

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Если функция n аргументов представлена в виде дизъюнкции минтермов, то говорят, что она записана в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме*, сокращённо *СДНФ*.

Пусть дана функция трёх аргументов, принимающая единичное значение на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Каждому набору соответствует минтерм. СДНФ имеет вид:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Запишем эту функцию через обозначения минтермов:

$$f = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Букву m можно удалить, оставив только номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f = (1, 2, 4, 5, 6).$$

Это наиболее компактное представление СДНФ. Им будем пользоваться и в дальнейшем.

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в СДНФ единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда *стандартной формой* [23].

В колонке f таблицы истинности n переменных может быть записано любое 2^n-разрядное двоичное число, каждому из которых соответствует некоторая булева функция. Следовательно, всего существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных.

. . . .

Упражнения

1. Запишите двоичные наборы, на которых минтермы принимают единичное значение:

1) $AB\overline{C}\,\overline{D}E$; 3) $\overline{A}B\overline{C}D$; 5) $P\overline{Q}R\overline{S}T\overline{U}$;

2) $\overline{B}C\overline{D}$; 4) $VX\overline{Y}Z$; 6) $\overline{X}_1X_2$.

2. Укажите номера выражений, являющихся минтермами.

1) $AB\overline{C}$; 3) $PQRP$; 5) $ABA\overline{C}$; 7) $AC\overline{M}$;

2) $A+B+C$; 4) $AK\overline{K}B$; 6) $BC\overline{D}$; 8) $AB\overline{B}C$.

3. Найдите десятичные индексы минтермов:

1) $A\overline{B}\,\overline{C}D$; 2) Q; 3) $C\overline{D}$; 4) A; 5) $B\overline{C}D$; 6) $\overline{P}$.

4. Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с нуля?

5. Сколько существует минтермов семи аргументов, двоичные индексы которых начинаются с двух нулей?

6. Сколько существует минтермов семи аргументов, в каждом из которых нет рядом стоящих инверсных переменных. Считать, что буквы в записях минтермов идут в алфавитном порядке.

. . . .

4.8 Совершенная конъюнктивная нормальная форма

СДНФ функции, представленной в таблице 4.1, имеет вид:

$$f = (1, 2, 3, 4, 5).$$

Запишем СДНФ её инверсии. Для этого необходимо включить в инверсию $\overline{f}$ все те и только те минтермы, которые не входят в заданную функцию:

$$\overline{f} = (0, 6, 7).$$

Запишем это выражение в аналитической форме:

$$\overline{f} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC.$$

Проинвертируем по теореме де Моргана (4.26) обе части выражения, левую и правую относительно знака равенства:

$$f = (A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}).$$

Получили запись функции в виде конъюнкции дизъюнкций, где в каждую дизъюнкцию входят все переменные (прямые в сочетании с инверсными), указанные в таблице. Такие дизъюнкции называют максимальными термами или, коротко, *макстéрмами* [4; 48], а функция, представленная в виде конъюнкции макстермов, получила название *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*). Макстермы, как и минтермы, имеют и своё определение: макстермом *n* переменных называется такая их дизъюнкция, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме [48, с. 49].

Макстермы условимся обозначать буквой *M* с десятичными индексами, определяемыми по аналогии с индексами минтермов, т. е. записываем в заранее заданном порядке буквы (как правило, алфавитном) и ставим в соответствие инверсным буквам нуль, а неинверсным – единицу. Десятичный эквивалент получившегося двоичного числа есть искомый индекс макстерма. Например: двоичный индекс макстерма

$$A + B + \overline{C} + D + \overline{E}$$

имеет вид 11010 согласно записи:

$$\begin{matrix} A & B & \overline{C} & D & \overline{E} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

В десятичной системе это число 26. Следовательно:

$$M_{26} = A + B + \overline{C} + D + \overline{E}.$$

Минтерм есть инверсия макстерма, и макстерм – это инверсия минтерма, при этом индексы их связаны между собой следующим образом:

$$m_i = \overline{M}_{2^n - i - 1}; \quad M_i = \overline{m}_{2^n - i - 1}, \tag{4.27}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Пример 4.4

Найти индекс макстерма, если $m_{11} = A\overline{B}CD$.

Воспользуемся формулами (4.27):

$$m_{11} = \overline{M}_{16-11-1} = \overline{M}_4; \quad M_4 = \overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D}.$$

Таким образом, минтерм m_{11} – это инверсия макстерма M_4.

Пример 4.5

Представить в СКНФ булеву функцию трёх переменных *A*, *B*, *C*, заданную дизъюнкцией минтермов m_3, m_4, m_5, т. е.

$$f(A, B, C) = (3, 4, 5).$$

В эту функцию входит три минтерма, следовательно, СДНФ инверсии состоит из пяти минтермов трёх переменных:

$$\overline{f} = (0, 1, 2, 6, 7) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC.$$

Инвертируем инверсию СДНФ:

$$f(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) =$$
$$= M_7 M_6 M_5 M_1 M_0.$$

Таким образом, выражение искомой СКНФ имеет вид:

$$f = M_0 M_1 M_5 M_6 M_7.$$

. . . .

Пример 4.6

Перечислить в порядке возрастания десятичные индексы макстермов функции $\overline{f}$, если

$$f(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 7, 12, 14). \qquad (4.28)$$

Записываем аналитическое выражение формулы (4.28):

$$f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD + AB\overline{C}\overline{D} + ABC\overline{D}.$$

Инвертируем его по теореме де Моргана, так как требуется найти макстермы инверсии заданной функции:

$$\overline{f} = \left(A+B+C+D\right)\left(A+B+C+\overline{D}\right)\left(A+\overline{B}+C+D\right)\&$$
$$\&\left(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C+D\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D\right) = M_{15}M_{14}M_{11}M_8M_3M_1.$$

Ответ: индексы макстермов идут в последовательности: 1, 3, 8, 11, 14, 15.

. . . .

4.9 О формах высших порядков

Кроме ДНФ и КНФ существуют более сложные выражения, содержащие различного вида скобки: круглые, квадратные, фигурные и др. Обычно классификация сложных выражений осуществляется на основе понятия *порядка формулы*, представляющей некоторую булеву функцию.

Булевы формулы, в которых нет знаков дизъюнкции и нет знаков конъюнкции, имеют нулевой порядок:

$$f = 0,\ f = 1,\ f = A,\ f = \overline{B}.$$

Если формула содержит только знаки дизъюнкции или только знаки конъюнкции, то такие выражения относятся к формам первого порядка, например:

$$A+\overline{C}+\overline{E}+F,\ \ A\overline{C}E\overline{F}.$$

Формула вида $f_1 = AD(D+C)$ имеет второй порядок. Первый порядок образует конъюнкция вне скобок, второй – дизъюнкция в скобках.

В формуле $f_2 = AD(D+CE)$ первый порядок образует операция конъюнкции вне скобок, второй – дизъюнкция, третий – конъюнкция в скобках. Следовательно, эта формула имеет третий порядок.

Выражение $f_3 = (\overline{A}+D)\overline{C} + (A+\overline{B}C\overline{E})F$ записано в форме четвёртого порядка: первый – дизъюнкция между скобками, второй – конъюнкция переменной F и скобочного выражения, третий – дизъюнкция в правых скобках, четвёртый – конъюнкция в правых скобках.

Выражение $f_4 = [(\overline{A}D+\overline{D})C+\overline{K}L](A+B\overline{C}E)F$ имеет пятый порядок: первый – конъюнкция между квадратными и круглыми скобками, второй – дизъюнкция в квадратных скобках (но не в круглых), третий – конъюнкция переменной C и выражения в круглых скобках, четвёртый – дизъюнкция в левых круглых скобках, пятый – конъюнкция в левых круглых скобках.

Очевидно, что порядок ДНФ и КНФ не может быть выше второго. Но если функция имеет второй порядок, то она не всегда является нормальной. Примерами могут служить *функции Пирса* (Вебба, согласно [14, с. 185]) и *Шеффера*, имеющие вид соответственно:

$$f=\overline{A+B+D+C};\ \ f=\overline{ABDC}\,.$$

Это формулы второго порядка, но они не являются ни ДНФ, ни КНФ.

В настоящее время хорошо изучены только ДНФ и КНФ, имеющие большое практическое значение. Но исследователей привлекают и формы высших порядков, так как путём повышения порядка функции, представленной в минимальной ДНФ (или КНФ), число входящих в неё букв можно ещё уменьшить. Например, в формуле

$$f = A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$$

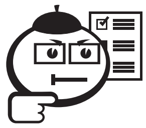
в классе ДНФ уменьшить число букв не удаётся. В ней 16 вхождений букв. А если порядок повысить до третьего, то число букв уменьшится в два раза:

$$f=(A\overline{B}+\overline{A}B)(C\overline{D}+\overline{C}D).$$

В связи с этим возникает вопрос о существовании алгоритма, позволяющего для произвольной ДНФ найти *абсолютно минимальную форму*, т. е. такую, в которой содержалось бы наименьшее число вхождений переменных по сравнению с любыми другими формами. Абхъянкаром был предложен такой алгоритм [40, с. 131], однако даже при четырёх переменных число операций m оценивается неравенством вида

$$2^{257} \le m \le 2^{65536}.$$

Так что алгоритм Абхъянкара имеет только теоретическое значение, а на практике задачу уменьшения числа вхождений переменных приходится решать в основном методом перебора.



Упражнения

1. Определите порядок следующих функций:

1) $f = [(AB + C)D + E]PQ$;

2) $f = [(A + B + C + EF)(A + B + CDE) + K + L]AB$;

3) $f = [(AB + C)D + E]P + [Q(R + ST) + T]M$;

4) $f = [(A + BC + EF)(A + B + CDE) + KL]AB$;

5) $f = [(ABC + AC)AB + C]B + C$.

2. Даны три функции:

$$f_1 = AD(D + CE);\ \ f_2 = (\overline{A} + D)\overline{C} + (A + C\overline{E})F;$$

$$f_3 = [(\overline{A}D + \overline{D})C + \overline{K}L](A + B\overline{C})F.$$

Определить порядок следующих выражений:

1) $f_1 + f_2 + f_3$; 2) $(f_1 + f_2)f_3$; 3) $f_1 + f_2 f_3$;

4) $f_1 f_2 f_3$; 5) $f_1 f_2 + f_1 f_3$; 6) $f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3$.

4.10 Понятие суперпозиции

Согласно [12], суперпозиция в булевой алгебре – это «подстановка одних булевых функций вместо аргументов в другие булевы функции» [12, с. 197]. Аналогично понятие суперпозиции определяется в [11; 14; 25; 32; 33].

Операцию суперпозиции поясним на примерах. Пусть дана функция

$$f(A,B,C,D) = (1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 14, 15), \quad (4.29)$$

в аналитической записи имеющая вид (минимальная ДНФ):

$$f = AC + C\overline{D} + \overline{B}D. \quad (4.30)$$

Вместо её букв можно подставлять любые булевы функции, например:

$$f_1 = A;\ \ f_2 = AB + C;\ \ f_3 = A + E;\ \ f_4 = 1;\ \ f_5 = Q;\ \ f_6 = 0,$$

и т. д. Для определённости воспользуемся конъюнкцией ABC и выясним, изменится ли функция (4.29), если в ней переменную C заменить выражением ABC.

Переменная C в (4.30) встречается два раза. В таких случаях подстановка выполняется дважды:

$$f = A(ABC) + (ABC)\overline{D} + \overline{B}D.$$

После преобразований получаем:

$$f = ABC + \overline{B}D.$$

Её СДНФ имеет вид:

$$f(A,B,C,D) = (1, 3, 9, 11, 14, 15),$$

что не совпадает с выражением (4.29).

Таким образом, в данном случае применение операции суперпозиции привело к изменению заданной функции. При других же подстановках функция может оказаться неизменной. Например, если в формуле (4.30) переменную A заменить конъюнкцией ABC, то функция не изменится.

4.11 О неоднозначности обозначений в булевой алгебре

Символика и терминология дискретной математики в настоящее время не являются устоявшимися. Одним и тем же понятиям авторы публикаций дают различные названия, применяют для них различные обозначения. Одни из терминов и обозначений получили большее распространение, другие – меньшее. В данном параграфе отметим некоторые из них.

Операция дизъюнкции во многих публикациях обозначается знаком «$\vee$», относящимся к символике Пеано – Рассела, а также Гильберта: $A \vee B$.

Как показывает анализ публикаций, этот знак получил значительное распространение. Примерами могут служить источники [1; 4; 11; 14; 25; 29; 32; 38; 51]. В подобных изданиях материал излагается почти полностью с теоретических позиций, то есть вопросы применения булевой алгебры если и упоминаются, то лишь вскользь на уровне третьестепенной важности. Кроме того, булевы формулы, приводимые в этих публикациях, как правило, особой сложностью не отличаются. В таких случаях безразлично, как обозначать дизъюнкцию.

С прикладной же точки зрения, когда приходится иметь дело с большим числом не самых простых формул, далеко не всё равно, какие применяются знаки. Булева формула должна быть представлена так, чтобы её структура схватывалась взглядом мгновенно, с наименьшими усилиями. Этим требованиям полностью удовлетворяет символика Пирса (точнее Шредера – Пирса), где для обозначения дизъюнкции применяется знак «+» [10, с. 69; 21, с. 219]. По этой причине знак «+» принят в данном пособии. Знак «+» для обозначения дизъюнкции применяется в публикациях [13; 15; 20; 23; 37; 48].

Конъюнкцию (*логическое умножение*, *логическое произведение*, *операция И*) многие авторы обозначают знаком «$\wedge$». Но в применении этот знак не очень удобен. Конъюнкция – «родня» арифметическому умножению двоичных чисел, поэтому в данной книге вместо знака «$\wedge$» принято ставить точку из символики Пирса: $A \cdot B$, а большей частью – не указывать никакого знака:

$$A \wedge B = A \cdot B = AB.$$

Инверсия, т. е. операция *отрицания*, в литературных источниках обозначается также различными знаками. Например, в [19; 20; 45; 53] применяется знак «$\sim A$»; в [23] – «A'»; в [20; 22; 24; 27; 35; 37] – «$\neg A$»; в [54] – «$!A$».

Нормальные формы в [20, с. 207] называются строками термов.

Минтермы нередко называют конституентами единицы [1; 6; 12; 39; 40], конституентами функции [14, с. 146], первыми совершенными формами [20, с. 186], членами стандартной суммы [23], элементарными конъюнкциями [4], полными правильными элементарными конъюнкциями (сокращённо ППЭК) [38] и т. д., а макстермы – конституентами нуля [6], элементарными суммами [15], вторыми совершенными формами [20], полными правильными элементарными дизъюнкциями (сокращённо ППЭД) [38] и др.

С. К. Клини использует химическую терминологию: логические переменные называет атомами, а их дизъюнкции и конъюнкции – молекулами [22].

Проблема неоднозначности символики в булевой алгебре возникла давно. Например, М. Фистер ещё в 1957 г. отмечал: «К сожалению, до настоящего времени общепринятых обозначений [булевых операций] нет. Обычно каждый автор использует свои собственные обозначения» [48, с. 58]. С тех пор прошло 60 лет, а проблема неоднозначности остаётся на том же уровне. Будет ли в дальнейшем устранена эта неоднозначность, трудно предсказать. Но не исключено, что со временем в теоретических работах могут остаться обозначения «$\vee$», для дизъюнкции, и «$\neg$», для инверсии; прикладники же, возможно, дизъюнкцию будут обозначать знаком Пирса «+», а инверсию – чертой над буквой.

5 Минимизация ДНФ логических формул

5.1 Алгебраическое упрощение булевых формул

В предыдущей главе термин «упрощение» уже упоминался, но без его толкования. Предполагалось, что интуитивного представления об упрощении булева выражения вполне достаточно. Однако при освещении вопросов практического применения булевых функций такое понятие, как «упрощение», необходимо уточнить, так как упрощать можно по различным критериям.

Прежде всего, отметим, что многие авторы, говоря об упрощении, применяют термин «минимизация булевых функций» [1; 6; 8; 12; 14; 23; 40; 48; 57]. Это не совсем корректный термин, так как если функция задана, например при помощи таблицы истинности, где указано, на каких наборах функция равна единице и на каких – нулю (и, возможно, не определена), то применение к ней терминов «упрощение» и «минимизация» лишено смысла. Очевидно, что авторы, когда пишут о минимизации, имеют в виду не таблицу истинности, а формулу, при помощи которой представлена функция. В связи с этим и в данном пособии под *упрощением булевой функции* будем понимать тождественные преобразования ее формулы, которые приводят к уменьшению числа вхождений аргументов по сравнению с исходной формулой. Цель этих преобразований состоит в нахождении *минимальной* формы булева выражения как предела упрощения по числу вхождений аргументов.

Уточним, что такое *число вхождений аргументов* и в чем его отличие от числа переменных, от которых зависит функция. Рассмотрим пример:

$$f = A\overline{B} + \overline{A}\overline{C}D.$$

Эта функция зависит от четырёх аргументов A, B, C, D, но содержит пять вхождений аргументов. Функция

$$f = A + \overline{A}B + BC + AC \tag{5.1}$$

зависит от трёх аргументов, а число её вхождений аргументов равно семи.

Таким образом, число вхождений аргументов – это общее число букв в записи булева выражения. При этом если какая-либо буква встречается в формуле несколько раз, то столько же раз она учитывается при подсчёте числа вхождений аргументов.

Рассмотрим формулу (5.1). Нетрудно заметить, что к ней применимы теоремы поглощения и склеивания, т. е. её можно упростить. Слагаемое A поглощает конъюнкцию AC, следовательно, сумму $A + AC$ можно заменить буквой A. Тогда число вхождений аргументов уменьшается до пяти.

$$f = A + \overline{A}B + BC + AC = A(1 + C) + \overline{A}B + BC = A + \overline{A}B + BC.$$

Аргумент A умножим на единицу и заменяем её дизъюнкцией $B + \overline{B}$:

$$f = A \cdot 1 + \overline{A}B + BC = A(B + \overline{B}) + \overline{A}B + BC.$$

Раскроем скобки и добавим конъюнкцию AB:

$$f = AB + A\overline{B} + \overline{A}B + AB + BC.$$

Выполняем операции склеивания:

$$f = A(B + \overline{B}) + B(\overline{A} + A) + BC = A + B + BC.$$

К сумме $B + BC$ применима теорема поглощения:

$$B + BC = B(1 + C) = B.$$

В результате получаем:

$$f = A + B + BC = A + B(1 + C) = A + B.$$

Это предел упрощения.

Заметим, что функция (5.1) зависит от трёх аргументов и имеет семь вхождений букв, а в результате минимизации получилось выражение, содержащее лишь два аргумента: A и B. От этих двух аргументов функция действительно (говорят: существенно) зависит. Аргумент C является *фиктивным*, от него функция зависит *несущественно* (т. е. вообще не зависит).

Рассмотрим ещё два примера, иллюстрирующие алгебраическое упрощение булевых формул.

Пример 5.1

Упростить:

$$f = AB\overline{C} + AC + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Сначала вынесем за скобки букву A и упростим скобочное выражение:

$$f = A(B\overline{C} + C) + BC + \overline{A}\overline{B} = A[B\overline{C} + C(B + \overline{B})] + BC + \overline{A}\overline{B} =$$

$$= A(B\overline{C} + BC + \overline{B}C + BC) + BC + \overline{A}\overline{B} =$$

$$= A[B(\overline{C} + C) + C(\overline{B} + B)] + BC + \overline{A}\overline{B} =$$

$$= A(B + C) + BC + \overline{A}\overline{B} = AB + AC + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Вынесем за скобки букву C:

$$f = AB + C(A + B) + \overline{A}\overline{B}.$$

Выражение в скобках – это инверсия последней конъюнкции $\overline{A}\overline{B}$, т. е.

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

Обозначим:

$$Q = A + B,\ \overline{Q} = \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

Тогда заданное выражение примет вид:

$$f = AB + CQ + \overline{Q} = AB + CQ + \overline{Q}(C + \overline{C}) = AB + CQ + C\overline{Q} + \overline{C}\,\overline{Q}.$$

Добавим к нему ещё одну конъюнкцию $C\overline{Q}$ (равенство не нарушится):

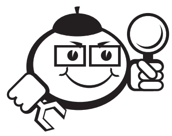
$$f = AB + CQ + C\overline{Q} + \overline{C}\,\overline{Q} + C\overline{Q} =$$

$$= AB + C(Q + \overline{Q}) + \overline{Q}(C + \overline{C}) = AB + C + \overline{Q}.$$

Подставим вместо $\overline{Q}$ его обозначение:

$$f = AB + C + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Далее упростить это выражение невозможно, следовательно, оно является минимальной формой заданной функции.



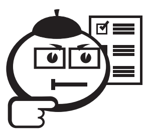
Пример 5.2

Упростить:

$$f = A\overline{C} + BC + \overline{A}B.$$

Действуем, как и в случае предыдущего примера:

$$f = A\overline{C} + BC(A + \overline{A}) + \overline{A}B = A\overline{C} + ABC + \overline{A}BC + \overline{A}B =$$
$$= A\overline{C} + ABC + \overline{A}B(C+1) = A\overline{C} + ABC + \overline{A}B =$$
$$= A(\overline{C} + BC) + \overline{A}B = A[\overline{C}(B + \overline{B}) + BC] + \overline{A}B =$$
$$= A(B\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + BC + B\overline{C}) + \overline{A}B =$$
$$= A[\overline{C}(B + \overline{B}) + B(C + \overline{C})] + \overline{A}B = A(\overline{C} + B) + \overline{A}B =$$
$$= A\overline{C} + AB + \overline{A}B = A\overline{C} + B(A + \overline{A}) =$$
$$= A\overline{C} + B.$$



Упражнения

1. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число вхождений аргументов (функцию не преобразовывать):

1) $f = \overline{A} + B\overline{C}$;
3) $f = \overline{A} + A + A + \overline{A}$;
2) $f = \overline{A} + AB + \overline{B}C$;
4) $f = B \cdot \overline{B} \cdot \overline{B} \cdot B$;

5) $f=\overline{A}B+AB+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}$;   7) $f=\overline{A+D}+C+\overline{C}+C$;

6) $f=A+\overline{B}+A\overline{B}+A\overline{B}$;   8) $f=\overline{A\cdot\overline{A}}\cdot\overline{A\cdot\overline{A}}$.

2. Найдите минимальную форму функций:

1) $f=(\overline{P}+PQ)Q$;   4) $f=(\overline{A}B+BC+\overline{A}C)AB$;

2) $f=P+(\overline{P}Q+\overline{Q}R+\overline{R}S)P$;   5) $f=P\overline{Q}+PQ+P\overline{Q}\,\overline{R}$;

3) $f=Q+P\overline{Q}$;   6) $f=AC+B+\overline{A}C$.

. . . .

5.2 Метод Квайна

Алгебраическая минимизация обычно требует очень большой изобретательности, и с практической точки зрения интереса не представляет, за исключением простейших случаев. Поэтому многие специалисты пытались разработать методы (алгоритмы), позволяющие найти минимальную форму булевой функции и при этом не требующие никакой изобретательности. Главным из таких методов является *метод Квайна*, составляющий основу всех других методов [14; 48]. Исходной формой функции для его применения является СДНФ, т. е. перед минимизацией заданное выражение необходимо представить дизъюнкцией минтермов. Проиллюстрируем метод Квайна на примере функции четырёх аргументов вида:

$$f=AB\overline{C}+BC+\overline{A}\,\overline{B}D+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Сначала находим СДНФ. Заданная функция зависит от четырёх аргументов A, B, C, D и содержит конъюнкции различной длины. Удлиним конъюнкции за счёт единиц так, чтобы в каждой конъюнкции было четыре знака:

$$f=AB\overline{C}\cdot 1+BC\cdot 1\cdot 1+\overline{A}\,\overline{B}D\cdot 1+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\cdot 1.$$

В первой конъюнкции отсутствует переменная D. В связи с этим единицу заменим дизъюнкцией вида $D+\overline{D}$. Во второй конъюнкции нет переменных A и D. Заменяем их дизъюнкциями $A+\overline{A}$ и $D+\overline{D}$ соответственно. Аналогично поступим и с оставшимися единицами. Тогда получим:

$$f=AB\overline{C}(D+\overline{D})+BC(A+\overline{A})(D+\overline{D})+\overline{A}\,\overline{B}D(C+\overline{C})+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}(A+\overline{A}).$$

Раскроем скобки, при этом буквы в минтермах запишем в алфавитном порядке, а сами минтермы расположим по возрастанию их индексов:

$$f=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}BCD+$$
$$+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}+ABCD.$$

Переходим к методу Квайна. Его основу составляет теорема склеивания, применяемая к каждой паре минтермов заданной функции. Начнём с нулевого минтерма и поочерёдно сравним его со всеми остальными. Если сравниваемые минтермы отличаются инверсией только одного аргумента, то к ним применяем теорему склеивания. Эти минтермы отмечаем, например, подчёркиваем, а их общую часть запишем в отдельный список. В данном случае минтермы m_0 и m_1, а также m_0 и m_8 дают соответственно:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Минтермы m_0, m_1 и m_8 подчёркиваем, при этом ранее подчёркнутый минтерм вторично не отмечаем:

$$f = \underline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \underline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD +$$
$$+\underline{A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD.$$

Переходим к минтерму m_1. Сравниваем его со всеми, кроме нулевого, в том числе и с подчёркнутыми. Получаем:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD = \overline{A}\,\overline{B}D.$$

Минтерм m_3 подчёркиваем. Теперь число подчёркнутых минтермов возросло до четырёх:

$$f = \underline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \underline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D} + \underline{\overline{A}\,\overline{B}CD} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD +$$
$$+\underline{A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD.$$

Аналогично сравниваем все остальные минтермы независимо от того, подчёркнуты они или нет, после чего заданная функция представится в виде дизъюнкции конъюнкций, полученных в результате склеивания минтермов:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC\overline{D} + \overline{A}BC +$$
$$+BCD + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

На этом заканчивается первый этап минимизации по методу Квайна.

Переходим ко второму этапу. Конъюнкции полученного выражения точно так же сравниваем. Начинаем с левой конъюнкции $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Она не склеивается ни с одной конъюнкцией выражения. Поэтому её не подчёркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$. Она также не склеивается ни с одной конъюнкцией. То же самое относится и к конъюнкциям $\overline{A}\,\overline{B}D$ и $\overline{A}CD$. Все их не подчёркиваем и сравниваем конъюнкцию $BC\overline{D}$:

$$BC\overline{D} + BCD = BC.$$

Конъюнкции $BC\overline{D}$ и BCD подчёркиваем:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + \underline{BC\overline{D}} + \overline{A}BC + $$
$$+\underline{BCD} + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

Переходим к конъюнкции $\overline{A}BC$:

$$\overline{A}BC + ABC = BC.$$

Получилась та же самая конъюнкция. Поскольку она является повторной, то вторично её не записываем, но соответствующие конъюнкции подчёркиваем:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + \underline{BC\overline{D}} + \underline{\overline{A}BC} + $$
$$+\underline{BCD} + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + \underline{ABC}.$$

Очередная конъюнкция $A\overline{C}\,\overline{D}$. Её не подчёркиваем, так как она не склеивается ни с одной конъюнкцией из всего выражения. За ней следуют склеивающиеся конъюнкции $AB\overline{D}$ и ABD, а также $AB\overline{C}$ и ABC, которые дают новую конъюнкцию AB. Конъюнкции $AB\overline{D}$, ABD, $AB\overline{C}$ и ABC подчёркиваем:

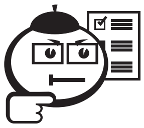
$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + \underline{BC\overline{D}} + \underline{\overline{A}BC} + $$
$$+\underline{BCD} + A\overline{C}\,\overline{D} + \underline{AB\overline{D}} + \underline{AB\overline{C}} + \underline{ABD} + \underline{ABC}.$$

Таким образом, на втором этапе получили две неповторяющиеся конъюнкции BC и AB. Дизъюнкция этих двух и всех неподчёркнутых конъюнкций, полученных на первом этапе, образует выражение:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + AB + A\overline{C}\,\overline{D},$$

в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций.

Выражение, полученное методом Квайна, называется *сокращённой дизъюнктивной нормальной формой*, а каждая его конъюнкция называется *простой импликантой*. Для всякой булевой функции существует единственная сокращённая ДНФ.



Упражнения

1. Представьте в СДНФ функцию:

$$f(A,B,C,D) = AB\overline{D} + A\overline{B}D + ABC + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

1) для ее СДНФ определите количество минтермов и число букв в СДНФ;

2) выполните операции первого этапа метода Квайна, т. е. сравните все минтермы между собой. Найдите число минтермов, оставшихся неподчёркнутыми, и количество неповторяющихся конъюнкций, содержащих по три аргумента;

3) выполните операции второго этапа метода Квайна. Определите число неподчёркнутых конъюнкций трёх аргументов и число неповторяющихся конъюнкций, содержащих по два аргумента;

4) найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенной формы функции.

2. Определите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенных форм функций:

1) $f(A,B,C) = AB + AC + \overline{A}\,\overline{C} + BC$;

2) $f(A,B,C) = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7)$;

3) $f(A,B,C,D) = (0,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$;

4) $f(A,B,C,D) = (2,\ 6,\ 7, 10,\ 11,\ 14, 15)$;

5) $f(A,B,C,D) = (0, 1,\ 2, 3,\ 7, 10,\ 11, 13, 14, 15)$.

. . . .

5.3 Метод Петрика

Сокращённая форма многих функций не является минимальной. В вопросах нахождения минимальных форм полную ясность ввёл Петрик [14, с. 106], разработав свой метод нахождения всех возможных минимальных форм на основе сокращённых [12].

Метод Петрика поясним на примере функции, СДНФ которой имеет вид:

$$f = (0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15). \qquad (5.2)$$

Представим её в сокращённой форме:

$$f = \overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}D + ACD. \qquad (5.3)$$

Это выражение не является минимальным. Оно содержит лишние простые импликанты. Если их удалить, то функция не изменится. Удалим из выражения (5.3) простую импликанту, например $A\overline{B}\,\overline{C}$, и получившееся выражение представим в СДНФ – функция останется той же самой. Но если удалить импликанту $\overline{A}\,\overline{D}$ и найти СДНФ, то она не совпадёт с (5.2), т. е. функция изменится.

В принципе таким способом можно получить все варианты *тупиковых форм*, т. е. таких выражений, в которых не найдётся ни одной простой импликанты, которую можно было бы удалить. Подобный метод хотя и возможен, но вследствие его громоздкости с практической точки зрения интереса не представляет. Метод Петрика позволяет найти все тупиковые формы гораздо быстрее. Основу его составляет *импликантная матрица* (табл. 5.1), в которой строки озаглавлены простыми импликантами, а колонки – минтермами.

Таблица 5.1

	0	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	15
$\overline{C}\overline{D}$	1		1				1			1		
$\overline{A}\,\overline{D}$	1	1	1		1							
$\overline{A}B$			1	1	1	1						
$B\overline{D}$			1		1					1	1	
BC					1	1					1	1
$A\overline{B}\,\overline{C}$							1	1				
$A\overline{B}D$								1	1			
ACD									1			1
	✓	✓	✓	✓	✓	✓						

Основное поле заполняем единицами по следующему правилу: берём какую-либо простую импликанту и выясняем, из каких минтермов она состоит. Эти минтермы отмечаем единицами. В первой строке в левой колонке записана простая импликанта $\overline{C}\,\overline{D}$. Она получена склеиванием минтермов 0, 4, 8, 12. Эти минтермы отмечаем в таблице: в колонках 0, 4, 8, 12 ставим единицы.

Переходим ко второй строке. В ней записана простая импликанта $\overline{A}\,\overline{D}$. Она получается склеиванием минтермов 0, 2, 4, 6. В колонках с номерами 0, 2, 4, 6 также ставим единицы. Аналогичным образом заполняем все строки таблицы.

В колонках находится различное число единиц. Например, в колонке 2 записана одна единица. Она говорит о том, что минтерм m_2 останется в функции, если импликанта $\overline{A}\,\overline{D}$ не будет удалена. Следовательно, её удалять нельзя. Также нельзя удалять и импликанту $\overline{A}B$. Обе они войдут во все формы функции. Но из импликантной матрицы их и соответствующие им минтермы следует удалить. В таблице 5.1 эти минтермы отмечены птичками (под колонками). После всех удалений получим упрощённую матрицу (табл. 5.2).

Введём логические переменные φ_1, φ_2, …, φ_6 (они записаны в левой колонке табл. 5.2) со следующей интерпретацией: $\varphi_1 = 1$, если конъюнкция $\overline{C}\,\overline{D}$

входит в функцию, и $\varphi_1 = 0$, если не входит; $\varphi_2 = 1$, если простая импликанта $B\overline{D}$ входит в функцию, и $\varphi_2 = 0$ в противоположном случае, и т. д. до последней простой импликанты.

Таблица 5.2

		8	9	11	12	14	15
φ_1	$\overline{C}\overline{D}$	1			1		
φ_2	$B\overline{D}$				1	1	
φ_3	BC					1	1
φ_4	$A\overline{B}\,\overline{C}$	1	1				
φ_5	$A\overline{B}D$		1	1			
φ_6	ACD			1			1

Тогда если $\varphi_1 + \varphi_4 = 1$, то минтерм m_8 входит в функцию. Если $\varphi_4 + \varphi_5 = 1$, то m_9 входит в функцию, и т. д.

Условие, при котором все минтермы останутся в функции, запишется в виде следующего уравнения:

$$(\varphi_1 + \varphi_4)\,(\varphi_4 + \varphi_5)\,(\varphi_5 + \varphi_6)\,(\varphi_1 + \varphi_2)\,(\varphi_2 + \varphi_3)\,(\varphi_3 + \varphi_6) = 1.$$

Раскроем скобки и выполним все операции согласно теореме поглощения:

$$\varphi_2\varphi_4\varphi_6 + \varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 + \varphi_1\varphi_2\varphi_5\varphi_6 + \varphi_1\varphi_3\varphi_4\varphi_6 + \varphi_1\varphi_3\varphi_5 = 1.$$

Расшифруем решение. Каждая конъюнкция в полученном уравнении может быть равной единице. Берём первую конъюнкцию. Если

$$\varphi_2\varphi_4\varphi_6 = 1,$$

то это значит, что согласно таблице 5.2 в функцию входят простые импликанты $B\overline{D}$, $A\overline{B}\overline{C}$ и ACD. Добавим к ним обязательные простые импликанты $\overline{A}B$ и $\overline{A}\overline{D}$. Получим первый вариант искомой тупиковой формы:

$$f_1 = \overline{A}\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + ACD,$$

содержащей 12 вхождений аргументов.

Аналогично находим ещё четыре тупиковые формы:

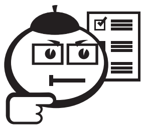
$$f_2 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B\overline{D} + BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}D;$$

$$f_3 = \overline{A}\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D} + A\overline{B}D + ACD;$$

$$f_4 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}\,\overline{C} + ACD;$$

$$f_5 = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{D} + BC + A\overline{B}D.$$

Таким образом, функция (5.2) имеет пять тупиковых дизъюнктивных нормальных форм, среди которых одна минимальная. В ней 11 вхождений аргументов.



Упражнения

1. Сколько тупиковых форм имеют следующие функции, зависящие от четырёх переменных? Сколько вхождений аргументов в минимальной форме?

1) $f = (2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15)$;

2) $f = (0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 14, 15)$;

3) $f = (1, 4, 5, 8, 9, 10, 11)$;

4) $f = (5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15)$;

5) $f = (0, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$;

6) $f = (0, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$.

2. Сколько простых импликант и сколько вхождений аргументов в минимальных ДНФ, если все функции зависят от четырёх переменных?

1) $f = (0, 3, 5, 6, 9, 15)$;

2) $f = (1, 2, 12, 13, 14, 15)$;

3) $f = (1, 2, 7, 10, 12, 15)$;

4) $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13)$;

5) $f = (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$.

5.4 Карты Вейча

При помощи карт Вейча легко осуществляются различные преобразования булевых формул: минимизация, нахождение СДНФ и СКНФ, инвертирование, дифференцирование и др.

Простейшей является карта одной переменной (рис. 5.1). Но она не имеет никакого значения, ни прикладного, ни теоретического. Поэтому изучение карт начнём с двух переменных (рис. 5.2). Левая половина карты обозначена буквой A, правая – той же буквой, но с инверсией. По горизонтали карта также разделена на две части. Верхняя половина обозначена буквой B, нижняя – буквой $\overline{B}$. В результате карта оказалась разделённой на четыре клетки. Левая верхняя клетка находится на пересечении областей A и B – записываем в неё минтерм AB. Правая верхняя клетка находится на пересечении областей $\overline{A}$ и B. Записываем в эту клетку минтерм $\overline{A}B$. Аналогично записываем $A\overline{B}$ и $\overline{A}\overline{B}$ в оставшихся двух клетках.

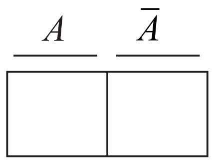


Рис. 5.1

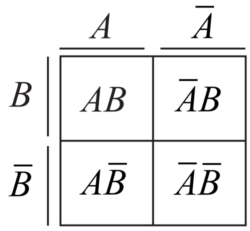


Рис. 5.2

На рисунке 5.3 приведена та же карта, но в трёх клетках её поставлены единицы. Эти единицы говорят о том, что дизъюнкция минтермов AB, $A\overline{B}$ и $\overline{A}\overline{B}$ образуют некоторую функцию:

$$f(A,B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B},$$

а в клетке, относящейся к минтерму $\overline{A}B$, единицы нет (что обозначает: в ней стоит нуль), поэтому минтерм $\overline{A}B$ в запись функции $f(A,B)$ не включён.

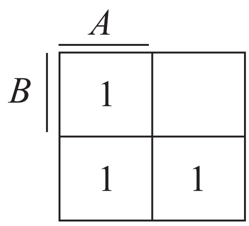


Рис. 5.3

На рисунке 5.3 указаны только неинверсные аргументы. Это значит, что буква $\overline{A}$ не пишется, но подразумевается. То же самое относится и к букве B. Она занимает верхнюю половину карты. Нижняя половина соответствует инверсной переменной $\overline{B}$.

Возможны и другие способы расположения букв вокруг карты. Например, на рисунке 5.4 показана карта для случая, когда зона действия буквы A находится не слева, а справа. Расположение минтермов вследствие этого изменилось. Перебором нетрудно установить, что всего существует восемь вариантов построения карты Вейча двух переменных.

		A
B	$\overline{A}B$	AB
	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A\overline{B}$

Рис. 5.4

	A	A		
B	$AB\overline{C}$	ABC	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
		C	C	

Рис. 5.5

На рисунке 5.5 изображена карта Вейча трёх аргументов. В ней также для каждого минтерма отведена одна клетка. На рисунке 5.6 представлена та же карта, но в клетках указаны десятичные номера минтермов. На рисунке 5.7 приведена карта трёх переменных с нанесённой на неё булевой функцией вида

$$f(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}.$$

	A	A		
B	6	7	3	2
	4	5	1	0
		C	C	

Рис. 5.6

	A	A		
B	1		1	1
		1	1	
		C	C	

Рис. 5.7

Единицы на этой карте говорят о том, что соответствующие минтермы входят в заданную функцию. Три минтерма – $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, ABC – в записи функции отсутствуют. По этой причине в клетках с номерами 0, 4, 7 единиц нет (если клетка пуста, то предполагается, что в ней стоит нуль).

На рисунке 5.8 представлена карта четырёх аргументов, где в клетках указаны минтермы в их цифровой записи. На рисунке 5.9 изображена карта пяти аргументов. Она получена из двух карт четырёх аргументов, приставленных одна к другой. Левая карта обозначена буквой E, а правая – буквой $\overline{E}$. Аналогичным образом можно построить карту на любое число аргументов.

Карта Вейча может быть построена многими способами. Если выбрана конфигурация, то одна карта от другой отличается только расположением букв. В данной книге в качестве эталонных приняты карты Вейча, приведённые на рисунках 5.2, 5.6, 5.8, 5.9.

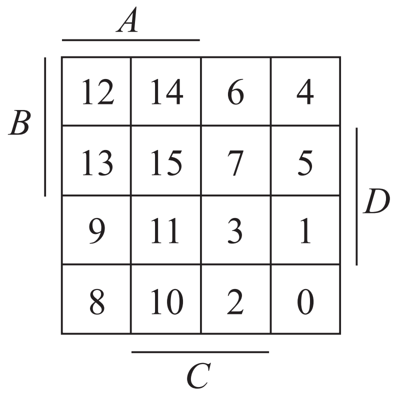


Рис. 5.8

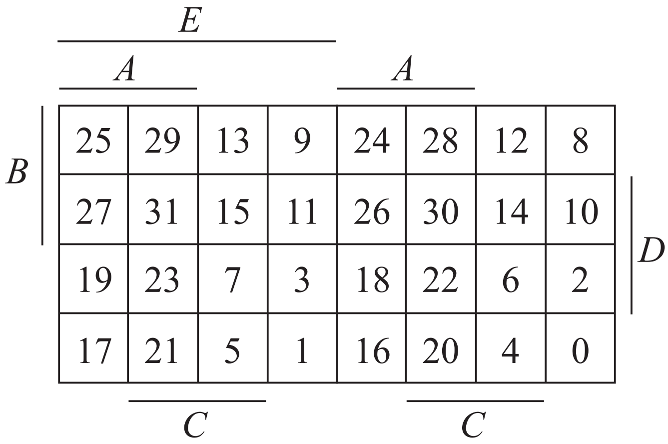


Рис. 5.9

5.5 Нанесение булевых функций на карту Вейча

Работа с картой Вейча всегда начинается с нанесения на неё булева выражения. Если функция представлена в СДНФ, то нанесение её на карту сводится к отысканию клеток, за которыми закреплены номера соответствующих минтермов. В найденные клетки ставятся единицы, как показано на рисунках 5.3 и 5.7.

На карту можно нанести функцию, заданную не только в СДНФ, но и в виде произвольной ДНФ. Например, нанесём на карту Вейча функцию (рис. 5.10):

$$f = B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C + A\overline{B}. \tag{5.4}$$

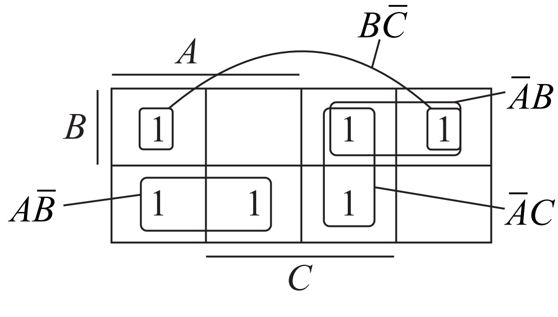


Рис. 5.10

Первая конъюнкция, входящая в функцию, имеет вид $B\overline{C}$. Соответствующая ей область карты находится на пересечении зон действия букв B и $\overline{C}$. Это две верхние клетки по концам строки. В них ставим единицы.

Вторая конъюнкция имеет вид $\overline{A}B$. Находим область на карте, являющуюся общей для зон $\overline{A}$ и B. Ставим в них единицы. Правая клетка уже занята, поэтому единицу ставим только на свободное место области $\overline{A}B$.

Наносим конъюнкцию $\overline{A}C$. Она на карте занимает две вертикально расположенные клетки на пересечении области $\overline{A}$ с областью C. И здесь ставим только одну единицу, так как одна единица уже поставлена при нанесении конъюнкции $\overline{A}B$. Осталась одна конъюнкция $A\overline{B}$. Она занимает в области A две нижние клетки. В них ставим единицы.

Рассмотрим еще один пример. Нанесём на карту функцию

$$f = A + BC. \tag{5.5}$$

Первое слагаемое состоит из одной буквы A. Ей соответствует область A из четырех клеток, следовательно, всю её заполняем единицами (рис. 5.11).

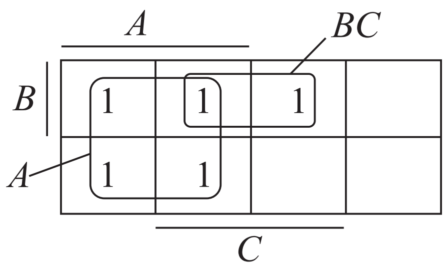


Рис. 5.11

Конъюнкции BC на карте соответствует область на пересечении зон, относящихся к буквам B и C. Эту область заполняем единицами. Заметим, что седьмой минтерм отмечен при нанесении буквы A. Вторично его не отмечаем.

При помощи карты Вейча легко найти СДНФ функции, если она представлена в ДНФ. Для этого наносим функцию на карту, а затем мысленно наложим на неё стандартную карту. Единицы покажут, какие номера минтермов входят в заданную функцию. Например, найдём СДНФ функции (5.4). Её карта Вейча изображена на рисунке 5.10. Сопоставив её с рисунком 5.6, получаем СДНФ:

$$f(A,B,C) = (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Точно таким же образом находим СДНФ функции (5.5):

$$f(A,B,C) = (3, 4, 5, 6, 7).$$

5.6 Операции над функциями, представленными в СДНФ

С помощью карт Вейча легко выявить равенство двух функций. Две функции тождественно равны, если их СДНФ совпадают. Например, функции

$$f_1 = AB\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{B}CD + A\overline{C}D;$$

$$f_2 = AB\overline{C} + BC\overline{D} + \overline{A}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD$$

внешне не имеют ничего общего, но если их нанести на карту Вейча четырёх аргументов, то окажется, что их СДНФ совпадают. Следовательно, $f_1 = f_2$.

Карты Вейча позволяют находить СДНФ инверсий функций, их дизъюнкции и конъюнкции. Чтобы найти СДНФ инверсии функции f, достаточно эту функцию нанести на карту Вейча. Номера минтермов, которым соответствуют пустые клетки на карте, дадут искомую инверсию. Например, СДНФ функции

$$f = A\overline{B} + \overline{C}D,$$

зависящей от четырёх переменных, имеет вид:

$$f = (1, 5, 8, 9, 10, 11, 13).$$

Минтермы, соответствующие пустым клеткам, дают СДНФ инверсии:

$$\overline{f} = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 15).$$

Чтобы найти СДНФ конъюнкции n функций, достаточно все их нанести на одну и ту же карту независимо одна от другой. В некоторых клетках может оказаться n единиц. Выписав номера клеток с n единицами, мы получим СДНФ конъюнкции n заданных функций. Например, пусть заданы три функции:

$$f_1 = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}D + ABC;$$

$$f_2 = \overline{A}BC + A\overline{C}D + \overline{B}C + AB\overline{D};$$

$$f_3 = BCD + AC\overline{D} + AB\overline{C}.$$

Соответствующие им карты Вейча приведены на рисунках 5.12, 5.13 и 5.14. Единицы со всех трёх карт перенесём на одну карту вместе с нулями, как показано на рисунке 5.15. Например, 12-й минтерм на рисунке 5.12 отсутствует (напомним, что пустой клетке соответствует нуль). А на рисунках 5.13 и 5.14 на месте 12-го минтерма стоят единицы. Поэтому в той же области на рисунке 5.15 ставим последовательность 011. Минтерм 14 отмечен единицами на всех картах. В соответствии с этим на рисунке 5.15 записываем последовательность 111. На месте четвёртого минтерма во всех трёх картах единиц нет. Следовательно, на рисунке 5.15 этот минтерм обозначаем последовательностью 000.

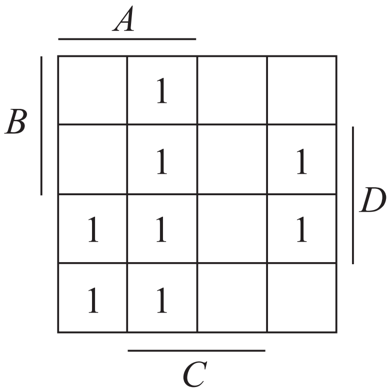


Рис. 5.12

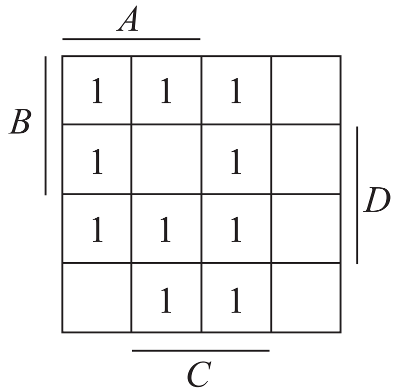


Рис. 5.13

A

B

1	1		
1	1	1	
	1		

D

C

Рис. 5.14

A

B

011	111	010	000
011	101	011	100
110	110	010	100
100	111	010	000

C

Рис. 5.15

Аналогично рассуждая, заполняем всю карту. На ней имеется только две клетки с тремя единицами. Это места минтермов 10 и 14, образующих конъюнкцию всех трёх функций (рис. 5.16):

$$f_1 f_2 f_3 = (10, 14).$$

A

B

	1		
	1		

D

C

Рис. 5.16

A

B

1	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	

D

C

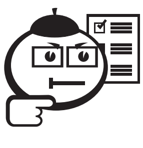
Рис. 5.17

Для нахождения СДНФ дизъюнкции двух и более функций все их последовательно наносим на одну и ту же карту Вейча. Например, чтобы найти СДНФ дизъюнкции предыдущих трёх функций, на карту Вейча наносим следующее выражение:

$$f_1 + f_2 + f_3 = A\overline{B} + \overline{A}\overline{C}D + ABC + \overline{A}BC + A\overline{C}D +$$
$$+ \overline{B}C + AB\overline{D} + BCD + AC\overline{D} + AB\overline{C}.$$

Искомая СДНФ имеет вид (рис. 5.17):

$$f_1 + f_2 + f_3 = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$



Упражнения

1. Укажите номер той клетки карты Вейча, где записывается минтерм:

1) ABC; 3) $\overline{A}B$; 5) $A\overline{B}\overline{C}DE$;

2) $AB\overline{C}D$; 4) $A\overline{B}\overline{C}D$; 6) $\overline{A}BC\overline{D}\overline{E}F$.

2. Сколько клеток на карте Вейча пяти аргументов?

3. Сколько клеток на карте Вейча десяти аргументов?

4. Нанесите функцию на карту Вейча четырёх аргументов. Определите число клеток, занятых единицами:

1) $f = AB + C\overline{D}$; 3) $f = A + \overline{D}$; 5) $f = AB + C + \overline{D}$;

2) $f = ABCD + \overline{A}\overline{D}$; 4) $f = A + \overline{B} + C$; 6) $f = A + C$.

5. Нанесите функции на карту Вейча четырёх аргументов. Сколько минтермов содержится в СДНФ их инверсий?

1) $f = AB$; 3) $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D$; 5) $f = A + \overline{B}C$;

2) $f = A + \overline{B} + CD$; 4) $f = A + \overline{B} + \overline{C} + D$; 6) $f = ABC + \overline{D}$.

6. Сколько клеток займёт функция $f = A\overline{B}$, если её нанести на карту трёх аргументов? Четырёх аргументов? Пяти аргументов? Шести аргументов?

. . . .

5.7 Минимизация ДНФ при помощи карт Вейча

Минимизация при помощи карт Вейча сводится к нахождению наименьшего числа простых импликант, но не всех возможных, а только тех, которые все вместе объединяют все единицы на карте.

Начинать минимизацию следует с единиц, входящих в единственную простую импликанту. Обратимся к карте, изображённой на рисунке 5.18. На ней имеются только три единицы, с которых следует начинать упрощение функции. Это минтерм m_2, входящий в единственную простую импликанту $\overline{B}C$, затем минтерм m_5, входящий в единственную простую импликанту $\overline{A}BD$, и минтерм m_{14}, входящий в простую импликанту AC. Начинать минимизацию с других единиц не следует, так как каждая из них входит более чем в одну простую импликанту, вследствие чего можно выбрать «не ту» импликанту и тогда минимальная форма не будет найдена.

На рисунке 5.19 приведена карта, на которой только два минтерма входят в единственные простые импликанты. Это минтермы m_3 и m_{10}. Соответствующие им простые импликанты обведены. На карте остались три единицы. Объединить их можно различными вариантами:

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + AB + A\overline{C};$$

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + AB + \overline{C}D;$$

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + BD + A\overline{C};$$

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + BD + \overline{C}D.$$

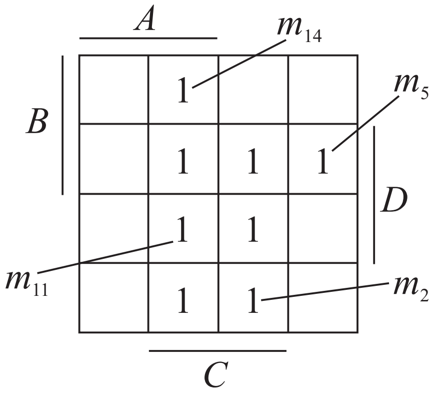


Рис. 5.18

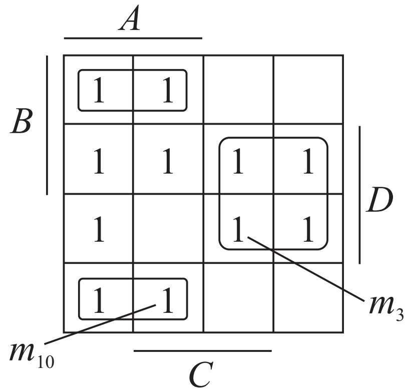


Рис. 5.19

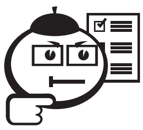
Таким образом, данная функция (рис. 5.19) имеет 4 минимальные формы.

На рисунке 5.20 представлена функция, минимальная ДНФ которой имеет два варианта записи:

$$f = \overline{D} + \overline{A}B + A\overline{B} + A\overline{C}; \quad f = \overline{D} + \overline{A}B + A\overline{B} + B\overline{C}.$$

1	1	1	1
1		1	1
1	1		
1	1	1	1

Рис. 5.20



Упражнения

1. Сколько простых импликант и сколько вхождений переменных содержат минимальные ДНФ следующих функций, зависящих от трёх переменных?

1) $f = AB + BC + B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C;$

2) $f = ABC + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C;$

3) $f = \overline{A}B + A\overline{B}\overline{C};$

4) $f = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C};$

5) $f = A\overline{B} + BC + B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C;$

6) $f = \overline{A}C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C.$

2. Сколько простых импликант и сколько вхождений переменных содержится в минимальных ДНФ функций четырёх переменных?

1) f = (0, 1, 2, 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15);

2) f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15);

3) f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15).

. . . .

5.8 Примеры минимизации ДНФ булевых формул при помощи карт Вейча

В данном параграфе приведены образцы решения задач по минимизации булевых формул. Расположение букв вокруг карт Вейча, как на рисунках 5.6, 5.8, 5.9.

1. $f = AB + BC + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (рис. 5.21).

1	1	1	
	1		1

Рис. 5.21

2. $f = \overline{A} + B\overline{C} + \overline{B}C$ (рис. 5.22).

1		1	1
	1	1	1

Рис. 5.22

3. $f = \overline{C} + AB + \overline{A}\,\overline{B}$ (рис. 5.23).

1	1		1
1		1	1

Рис. 5.23

4. $f = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (рис. 5.24).

1		1	
	1		1

Рис. 5.24

5. $f = BC + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\overline{B} = BC + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}C$ (рис. 5.25).

	1	1	
1		1	1

Рис. 5.25

6. $f = AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}C + \overline{A}\overline{B}$ (рис. 5.26).

1		1	
	1	1	1

Рис. 5.26

7. $f = A\overline{C} + BC + \overline{A}\overline{B} = AB + \overline{A}C + \overline{B}\overline{C}$ (рис. 5.27).

1	1	1	
1		1	1

Рис. 5.27

8. $f = AC + \overline{A}B + \overline{B}\overline{C} = BC + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}$ (рис. 5.28).

	1	1	1
1	1		1

Рис. 5.28

9. $f = \overline{B} + C$ (рис. 5.29).

	1	1	
1	1	1	1

Рис. 5.29

10. $f = \overline{C} + \overline{A}B + A\overline{B}$ (рис. 5.30).

1		1	1
1	1		1

Рис. 5.30

11. $f = \overline{C}$ (рис. 5.31).

1			1
1			1

Рис. 5.31

12. $f = C + AB + \overline{A}\,\overline{B}$ (рис. 5.32).

1	1	1	
	1	1	1

Рис. 5.32

13. $f = AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}\overline{B}$ (рис. 5.33).

1			
	1	1	1

Рис. 5.33

14. $f = AC + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C} = AC + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}$ (рис. 5.34).

	1		1
1	1		1

Рис. 5.34

15. $f = B\overline{C} + A\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$ (рис. 5.35).

1			1
1		1	1

Рис. 5.35

16. $f = 1$ (рис. 5.36).

1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 5.36

17. $f = \overline{C}\,\overline{D} + CD + AB + BC + AC$;

$f = \overline{C}\,\overline{D} + CD + AB + BC + A\overline{D}$;

$f = \overline{C}\,\overline{D} + CD + AB + B\overline{D} + AC$; $f = \overline{C}\,\overline{D} + CD + AB + B\overline{D} + A\overline{D}$ (рис. 5.37).

1	1	1	1
1	1	1	
	1	1	
1	1		1

Рис. 5.37

18. $f = BC + \overline{C}\,\overline{D} + A\overline{D} + \overline{A}CD + A\overline{B}\overline{C}$ (рис. 5.38).

1	1	1	1
	1	1	
1		1	
1	1		1

Рис. 5.38

19. $f = AC + A\overline{B}D + \overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\,\overline{D}$ (рис. 5.39).

	1		
	1		1
1	1	1	
	1		1

Рис. 5.39

20. $f = \overline{B}\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + ABCD + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}C\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$ (рис. 5.40).

1		1	
	1		1
1		1	
1	1	1	1

Рис. 5.40

21. $f = B + CD + \overline{C}\,\overline{D} + AC$; $f = B + CD + \overline{C}\,\overline{D} + A\overline{D}$ (рис. 5.41).

22. $f = \overline{C}\,\overline{D} + A\overline{D} + A\overline{C} + BC + \overline{A}C\,D$ (рис. 5.42).

23. $f = \overline{A}\overline{B} + AC + \overline{B}D + \overline{A}\overline{C}D + AB\overline{D}$ (рис. 5.43).

24. $f = \overline{C} + \overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{B} + ABD + \overline{A}\,\overline{D}$ (рис. 5.44).

1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	
1	1		1

Рис. 5.41

1	1	1	1
1	1	1	
1		1	
1	1		1

Рис. 5.42

1	1		
	1		1
1	1	1	1
	1	1	1

Рис. 5.43

1		1	1
1	1		1
1		1	1
1	1	1	1

Рис. 5.44

25. $f = \overline{C}\overline{D} + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C} + BC + ACD$ (рис. 5.45).

26. $f = D + \overline{A}C + \overline{B}C + AB\overline{C}$ (рис. 5.46).

27. $f = \overline{C} + \overline{D} + \overline{A}B + A\,\overline{B}$ (рис. 5.47).

28. $f = AC\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{A}CD + \overline{B}\overline{C}\,\overline{D}$ (рис. 5.48).

1	1	1	1
	1	1	1
	1		1
1		1	1

Рис. 5.45

1		1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

Рис. 5.46

1	1	1	1
1		1	1
1	1		1
1	1	1	1

Рис. 5.47

	1		
1		1	1
		1	
1	1		1

Рис. 5.48

29. $f = A\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{D} + \overline{B}\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{A}BD + \overline{A}CD + BCD$
(рис. 5.49).

30. $f = BC\overline{D} + ABD + \overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{D}$ (рис. 5.50).

31. $f = \overline{A}\,C\overline{D} + ACD + \overline{A}\overline{C}D + \overline{B}\overline{C} + \overline{B}D$;

$f = \overline{A}\,C\overline{D} + ACD + \overline{A}\overline{C}D + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}$ (рис. 5.51).

32. $f = A\overline{D} + BCD + \overline{A}\overline{B}D + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

$f = A\overline{D} + BCD + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

$f = A\overline{D} + BCD + \overline{A}CD + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

$f = A\overline{D} + ABC + \overline{A}CD + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (рис. 5.52).

1		1	
	1	1	1
1		1	
1	1		1

Рис. 5.49

	1	1	
1	1		
	1	1	
1	1		

Рис. 5.50

		1	
	1		1
1	1	1	1
1		1	1

Рис. 5.51

1	1		
	1	1	
		1	1
1	1		1

Рис. 5.52

33. $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}C + ABD + A\overline{C}\,\overline{D}$ (рис. 5.53).

34. $f = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}D + A\overline{C}D$ (рис. 5.54).

35. $f = \overline{C} + D + A\overline{B}$ (рис. 5.55).

36. $f = AD + \overline{C}D + \overline{A}C\overline{D} + \overline{B}D$ (рис. 5.56).

1		1	
1	1	1	
		1	1
1		1	1

Рис. 5.53

		1	1
1			
1	1	1	1
		1	1

Рис. 5.54

1			1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1		1

Рис. 5.55

		1	
1	1		1
1	1	1	1
		1	

Рис. 5.56

37. $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD$ (рис. 5.57).

38. $f = ABC + ABD + ACD + BCD + \overline{A}\,\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D}$ (рис. 5.58).

1		1	
	1		
1		1	1
		1	1

Рис. 5.57

	1		1
1	1	1	
	1		1
1			1

Рис. 5.58

	1		
1	1		
1	1	1	
1		1	1

Рис. 5.59

1			
	1		1
		1	
1	1		1

Рис. 5.60

39. $f = AD + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{D}$ (рис. 5.59).

40. $f = A\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + ABCD + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D$ (рис. 5.60).

41. $f = AB + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{C} + ACE$ (рис. 5.61).

1	1		1	1	1		1
1	1		1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1		1				1

Рис. 5.61

	1				1		1
1	1	1			1	1	
	1	1		1	1	1	
	1		1	1	1		

Рис. 5.62

42. $f = AC + CD + A\overline{B}\,\overline{E} + ABDE + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}E$ (рис. 5.62).

43. $f = BE + \overline{A}C + \overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ (рис. 5.63).

1	1	1	1			1	
1	1	1	1			1	
	1	1			1	1	
		1		1		1	

Рис. 5.63

1	1					1	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1				1	1	

Рис. 5.64

44. $f = D + ABE + ACE + \overline{A}C\overline{E} + \overline{B}C\overline{E}$;

$f = D + ABE + \overline{A}C\overline{E} + A\overline{B}C$ (рис. 5.64).

1	1		1	1			1
1	1		1	1			1
1			1	1	1	1	1
1			1	1	1	1	1

Рис. 5.65

1	1			1	1	1	
1	1	1		1	1	1	
	1	1			1	1	
		1					1

Рис. 5.66

45. $f = \overline{C} + \overline{B}\,\overline{E} + ABE$ (рис. 5.65).

46. $f = CD + AB + BC\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}CE + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ (рис. 5.66).

5.9 Примеры минимизации ДНФ с учётом неопределённых состояний

Булева функция называется *полностью* (*всюду*) *определённой*, если для каждого набора значений аргументов известно, чему она равна – нулю или единице. Если же существует хотя бы один набор, на котором значение функции не указано, то такая функция называется *неполностью определённой* (в [51] их называют частичными функциями).

Для обозначения неопределённых состояний на картах Вейча и в таблицах соответствия будем применять крестик в виде знака арифметического умножения «×».

Наборы, на которых функция не определена, иногда называют запрещёнными состояниями, а в [48] им дано название *избыточные комбинации*.

Чтобы минимизировать неполностью определённую функцию, её сначала необходимо доопределить, то есть крестики заменить единицами или нулями, так как в аналитическом представлении неполностью определённой функции крестик поставить некуда. При этом заменять крестики единицами необходимо только в том случае, если с их участием число букв простой импликанты уменьшается. Для иллюстрации этого ниже приведено 28 примеров.

Минимизация с учётом неопределённых состояний очень часто осуществляется неоднозначно. Но в данном параграфе из всех возможных минимальных форм приводится только по одному варианту.

1. $f = \overline{B}$ (рис. 5.67).

2. $f = \overline{C} + AB + \overline{A}\overline{B}$ (рис. 5.68).

3. $f = B\overline{C} + A\overline{B}C$ (рис. 5.69).

4. $f = A\overline{B} + \overline{A}B$ (рис. 5.70).

		×	×
×	1	1	1

Рис. 5.67

×	1		×
1		1	1

Рис. 5.68

1		×	1
	1		×

Рис. 5.69

×		1	1
×	1		×

Рис. 5.70

5. $f = AB + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (рис. 5.71).

6. $f = AB + BC + AC$ (рис. 5.72).

7. $f = AB + \overline{A}\overline{B}$ (рис. 5.73).

8. $f = 1$ (рис. 5.74).

×	1	×	
	×		1

Рис. 5.71

1	×	1	
	1		

Рис. 5.72

1	1	×	
×		1	1

Рис. 5.73

×	1	×	1
1	×	×	1

Рис. 5.74

9. $f = B\overline{D} + C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D$ (рис. 5.75).

10. $f = A + \overline{C}\,\overline{D} + BCD$ (рис. 5.76).

11. $f = \overline{A}\overline{D} + \overline{C}D + \overline{B}\overline{D} + ABD$ (рис. 5.77).

12. $f = C + AB$ (рис. 5.78).

1	1	1	×
	×	×	
1			×
	×	1	

Рис. 5.75

×	1		1
1	×	1	
1	×		×
1	×		1

Рис. 5.76

		1	×
×	1		1
1		×	1
1	1	×	1

Рис. 5.77

×	1	1	×
1	×	1	
×	×	×	×
	×	1	

Рис. 5.78

13. $f=\overline{B}\overline{D}+\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}+BCD$ (рис. 5.79).

14. $f=\overline{D}+\overline{B}C+AB\overline{C}$ (рис. 5.80).

15. $f=D+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (рис. 5.81).

16. $f=A\overline{D}+B\overline{D}+C$ (рис. 5.82).

1			$\times$
	$\times$	1	
1	$\times$		$\times$
$\times$	$\times$	1	$\times$

Рис. 5.79

1	$\times$	1	1
1		$\times$	
	1	1	
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Рис. 5.80

1			
$\times$	$\times$	1	1
1	$\times$	$\times$	$\times$
	1		1

Рис. 5.81

1	1	$\times$	1
$\times$	1	1	
	$\times$	$\times$	
1	$\times$	$\times$	

Рис. 5.82

17. $f=\overline{B}\overline{D}+\overline{B}C+B\overline{C}D$ (рис. 5.83).

18. $f=\overline{D}+\overline{B}C$ (рис. 5.84).

19. $f=\overline{B}D+\overline{A}B+BC\overline{D}$ (рис. 5.85).

20. $f=D+\overline{A}C$ (рис. 5.86).

		$\times$	$\times$
1	$\times$		1
$\times$	1	$\times$	
$\times$	1	1	1

Рис. 5.83

$\times$	$\times$	1	1
	$\times$		$\times$
$\times$	1	$\times$	
1	1	$\times$	$\times$

Рис. 5.84

	1	$\times$	$\times$
$\times$		1	$\times$
$\times$	1	1	1
$\times$	$\times$		

Рис. 5.85

$\times$		1	
1	1	$\times$	$\times$
1	$\times$	1	$\times$
	$\times$	$\times$	

Рис. 5.86

21. $f=\overline{C}\overline{D}+BC+\overline{A}\overline{D}$ (рис. 5.87).

22. $f=\overline{A}+\overline{B}\overline{D}+BD$ (рис. 5.88).

23. $f=ABD+\overline{A}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$ (рис. 5.89).

24. $f=D+A\overline{B}$ (рис. 5.90).

1	$\times$	$\times$	1
	1	$\times$	
	$\times$		
$\times$		1	$\times$

Рис. 5.87

		$\times$	1
$\times$	1	1	$\times$
		1	1
1	$\times$	$\times$	$\times$

Рис. 5.88

$\times$		$\times$	
1	1	1	
	$\times$	$\times$	
$\times$		1	1

Рис. 5.89

$\times$		$\times$	$\times$
1	$\times$	$\times$	1
1	$\times$	$\times$	1
$\times$	1	$\times$	

Рис. 5.90

25. $f=\overline{C}\overline{D}+AC+CD$ (рис. 5.91).

26. $f=A\overline{C}+\overline{A}C+ABE$ (рис. 5.92).

$\times$	1		$\times$	$\times$	1	$\times$	$\times$
	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	1	
	$\times$	1		$\times$	1	1	
$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	1		1

Рис. 5.91

$\times$	$\times$	$\times$		1	$\times$	1	$\times$
$\times$	1	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$\times$		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	
1		1		$\times$	$\times$	1	

Рис. 5.92

27. $f=CD+ABD\overline{E}+\overline{C}\overline{D}E+\overline{A}\overline{B}DE$ (рис. 5.93).

28. $f = AC + A\overline{D}E + A\overline{B} + \overline{C}D\overline{E}$ (рис. 5.94).

1			1			×	
	1	×		1	×	×	
	×	×	1		1	1	
×			1	×			

Рис. 5.93

1	1		×		1		×
	×	×		×	×		1
1	1	×		1	1		×
×	1	×	×	×	1	×	

Рис. 5.94

6 Конъюнктивные формы и другие направления в развитии булевой алгебры

6.1 Минимизация конъюнктивных нормальных форм булевых функций

Всякая булева функция может быть представлена не только в ДНФ, но и в КНФ. В данном параграфе рассмотрим приём, позволяющий на основе ДНФ заданной функции f найти её КНФ. Суть его состоит в двойном инвертировании выражения f. Первое инвертирование осуществляется на уровне СДНФ. В результате получается инверсия исходного выражения, состоящая из всех минтермов, отсутствующих в заданной функции. Затем инверсию минимизируем и её минимальную ДНФ инвертируем по теореме де Моргана.

Например, пусть требуется найти минимальную КНФ следующей функции четырёх аргументов:

$$f = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{D} + ABC\overline{D}.$$

СДНФ её инверсии имеет вид:

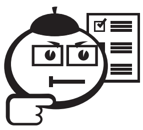
$$\overline{f} = (0, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 13, 15).$$

Воспользовавшись картой Вейча, получаем минимальную ДНФ для $\overline{f}$:

$$\overline{f} = AD + \overline{C}D + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}. \tag{6.1}$$

Инвертируем это выражение и получаем минимальную КНФ:

$$f = (\overline{A} + \overline{D})(C + \overline{D})(B + \overline{C})(A + B).$$



Упражнения

1. Сколько знаков дизъюнкции и сколько вхождений переменных в минимальных КНФ следующих функций четырёх переменных?

1) $f = B\overline{C}D + \overline{A}CD + A\overline{B}C + A\overline{B}D + \overline{A}B\overline{D};$

2) $f = AB\overline{D} + ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D};$

3) $f = B\overline{D} + ABCD + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D};$

4) $f = AB\overline{C}D + \overline{A}CD + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$

5) $f = A\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D.$

2. Сколько знаков дизъюнкции и сколько вхождений переменных в минимальных КНФ следующих функций четырёх переменных?

1) $f=(B+C+D)(\overline{A}+C+D)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+D)(\overline{A}+B+\overline{D})$;

2) $f=(A+B+\overline{D})(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{D})(A+\overline{C}+\overline{D})$;

3) $f=(\overline{A}+B+D)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(B+D)(A+C+\overline{D})$;

4) $f=(A+\overline{D})(\overline{A}+B+C)(\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+D)(A+\overline{C}+D)$;

5) $f=(A+\overline{D})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+D)(\overline{A}+B+\overline{D})(B+\overline{C}+\overline{D})$.

. . . .

6.2 Минимизация КНФ с учётом неопределённых состояний

Минимизация КНФ с учётом неопределённых состояний при помощи карт Вейча осуществляется следующим образом:

а) наносим на карту Вейча заданную функцию *f*;

б) наносим на эту же карту неопределённые состояния (если в одной и той же клетке окажутся единица и неопределённость, то ставим неопределённость);

в) строим карту Вейча для инверсии заданной функции $\overline{f}$. Для этого на ней вместо нулей ставим единицы, а вместо единиц – нули;

г) находим минимальную ДНФ функции $\overline{f}$;

д) минимальную ДНФ функции $\overline{f}$ инвертируем по теореме де Моргана. Получим минимальную КНФ.

Например, найдём минимальную КНФ функции четырёх аргументов:

$$f=(1,\ 4,\ 9,\ 11,\ 12),$$

не определённой на состояниях 0, 5, 7, 8, 13, 15.

На рисунке 6.1 изображена карта Вейча для заданной функции. Крестиками на ней отмечены неопределённые состояния. На рисунке 6.2 приведена карта Вейча, на которую нанесена инверсия заданной функции с теми же неопределёнными состояниями. (Неопределённые состояния не инвертируются, они остаются неопределёнными независимо от того, в какой форме записывается функция – ДНФ, КНФ или в какой-либо из форм высшего порядка.)

1			1
×	×	×	×
1	1		1
×			×

Рис. 6.1

	1	1	
×	×	×	×
		1	
×	1	1	×

Рис. 6.2

	1		1
	1		
1			1

Рис. 6.3

1		1	
1		1	1
1	1	1	1
	1	1	

Рис. 6.4

Анализируем карту (рис. 6.2). На ней имеется одна единица (минтерм 3), которая даёт единственным образом простую импликанту $\overline{A}C,$ если на наборе 0111 (десятичное 7) функцию $\overline{f}$ доопределить единицей. Оставшиеся две единицы (минтермы 10 и 14) вместе с соседними минтермами 2 и 6 дают ещё одну простую импликанту $C\overline{D}$. Таким образом, получаем:

$$\overline{f} = \overline{A}C + C\overline{D}.$$

Инвертируем это выражение и получаем минимальную КНФ:

$$f = (A + \overline{C})(\overline{C} + D).$$

Чтобы из КНФ функцию перевести в ДНФ, в ней можно раскрыть скобки и полученный результат представить в ДНФ (совершенной или минимальной). Например, представим в минимальной ДНФ функцию

$$f = (A + \overline{C})(C + \overline{D})(B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C). \tag{6.2}$$

Раскрываем скобки:

$$f = (AC + A\overline{D} + \overline{C}\,\overline{D})(B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C) =$$
$$= (ABC + AB\overline{D} + B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}\,\overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + C) =$$
$$= \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABC + ABC\overline{D}.$$

Наносим это выражение на карту Вейча (рис. 6.3) и минимизируем:

$$f = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABC.$$

Функцию (6.2) можно перевести в ДНФ и другим способом. Сначала по теореме де Моргана находим её инверсию:

$$\overline{f} = \overline{A}C + \overline{C}D + \overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Инверсию наносим на карту Вейча (рис. 6.4). Инвертируем карту, получим прямую форму, представленную в СДНФ (рис. 6.3). А на основе СДНФ нетрудно найти любую другую ДНФ.

6.3 Примеры минимизации КНФ с учётом неопределённых состояний

Как и в случае дизъюнктивных нормальных форм булевых функций, минимизация конъюнктивных форм с учётом неопределённых состояний нередко осуществляется неоднозначно. Но в данном параграфе приводятся только по одной минимальной форме для каждой функции.

$$f(A,B,C)=(1,3,5,7);\ [0,4,6].$$

×	1	1	
×	1	1	×

Рис. 6.5

×			1
×			×

Рис. 6.6

×	1	1	×
×	1		

Рис. 6.7

×			×
×		1	1

Рис. 6.8

×	1		
	1	1	×

Рис. 6.9

×		1	1
1			×

Рис. 6.10

×		1	×
	1		

Рис. 6.11

×	1		×
1		1	1

Рис. 6.12

Пример 6.1

На рисунках 6.5 и 6.6 приведены СДНФ функции

$$f(A,B,C)=(1,3,5,7);\ [0,4,6],$$

и её инверсии. Минимальная ДНФ инверсии имеет вид $\overline{f}=\overline{C}$; минимальная КНФ: $f = C$.

Пример 6.2

На рисунке 6.7 представлена СДНФ функции

$$f(A,B,C)=(3,5,7);\ [2,4,6].$$

На рисунке 6.8 – СДНФ её инверсии. Минимальная ДНФ инверсии: $\overline{f}=\overline{A}\overline{B}$; минимальная КНФ: $f=A+B$.

Пример 6.3

$f(A,B,C)=(1,5,7);\ [0,6].$

На рисунке 6.9 приведена СДНФ; на рисунке 6.10 – СДНФ инверсии. Минимальная ДНФ инверсии: $\overline{f}=\overline{A}B+\overline{C}$; минимальная КНФ: $f=(A+\overline{B})C$.

Пример 6.4

$f(A,B,C)=(3,5);\ [2,\ 6].$

На рисунке 6.11 – СДНФ; на рисунке 6.12 – СДНФ инверсии. Минимальная ДНФ инверсии: $\overline{f}=AB+\overline{A}\overline{B}+\overline{C}$; минимальная КНФ: $f=(\overline{A}+\overline{B})(A+B)C.$

1			1
×	×	×	×
1	1	1	1
×	1		

Рис. 6.13

	1	1	
×	×	×	×
×		1	1

Рис. 6.14

×	1	×	1
		1	
×	1		×
1	1		1

Рис. 6.15

×		×	
1	1		1
×		1	×
		1	

Рис. 6.16

1		1	1
×	×	×	×
1		1	1
×	1	1	

Рис. 6.17

	1		
×	×	×	×
	1		
×			1

Рис. 6.18

	1		1
×	1	×	1
	1		
1	×		1

Рис. 6.19

1		1	
×		×	
1		1	1
	×	1	

Рис. 6.20

Пример 6.5

$f(A,B,C,D)=(1,3,4,9,10,11,12);\ [5,\ 7,\ 8,\ 13,\ 15].$

На рисунке 6.13 – СДНФ; на рисунке 6.14 – СДНФ инверсии. Минимальная ДНФ инверсии: $\overline{f}=BC+\overline{A}\overline{B}\overline{D}$; минимальная КНФ: $f=(\overline{B}+\overline{C})(A+B+D).$

Пример 6.6

$f(A,B,C,D)=(0,4,7,8,10,11,14);\ [1,\ 6,\ 9,\ 12].$

Рисунок 6.15 – СДНФ; рисунок 6.16 – инверсия. Минимальная ДНФ инверсии:

$$\overline{f}=\overline{C}D+ABD+\overline{A}\overline{B}C.$$

Минимальная КНФ:

$$f=(C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{D})(A+B+\overline{C}).$$

Пример 6.7

$f(A,B,C,D) = (1,2,3,4,6,9,10,12);$ [5, 7, 8, 13, 15].

Рисунок 6.17 – СДНФ; рисунок 6.18 – инверсия. Минимальная ДНФ инверсии:

$$\overline{f} = ABC + ACD + \overline{B}\overline{C}\overline{D}.$$

Минимальная КНФ:

$$f = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})(B + C + D).$$

Пример 6.8

$f(A,B,C,D) = (0,4,5,8,11,14,15);$ [7, 10, 13].

На рисунке 6.19 – СДНФ; на рисунке 6.20 – СДНФ инверсии. Минимальная ДНФ инверсии:

$$\overline{f} = \overline{A}C + \overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}.$$

Минимальная КНФ:

$$f = (A + \overline{C})(B + C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + C).$$

6.4 Алгебра Жегалкина

Иван Иванович Жегалкин – профессор МГУ, специалист по математической логике (1869–1947).

В алгебре Жегалкина две операции – *конъюнкция и сумма* (*сложение*) *по модулю 2* (другие названия суммы по модулю 2: операция «неравнозначно», «исключающее ИЛИ», «разность»). Формула, построенная из констант 0, 1, отдельных переменных, их конъюнкций или сумм по модулю 2, называется *полиномом Жегалкина* [57, с. 32].

Аксиомы для конъюнкции даны в параграфе 4.2, поэтому приведём лишь аксиомы, относящиеся к операции сложения по модулю 2:

$$0 \oplus 0 = 0; \tag{6.3}$$

$$0 \oplus 1 = 1; \tag{6.4}$$

$$1 \oplus 0 = 1; \tag{6.5}$$

$$1 \oplus 1 = 0, \tag{6.6}$$

где знак $\oplus$ обозначает операцию суммы по модулю 2.

При помощи аксиом легко найти значение любого выражения Жегалкина, если заданы значения аргументов. Вычислим, например, значение выражения

$$A \oplus BC \oplus AC \tag{6.7}$$

на наборе 101. Так как согласно набору 101 $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, то

$$1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0.$$

Таким образом, выражение (6.7) на наборе 101 равно нулю.

Операция суммы по модулю 2 коммутативна и ассоциативна:

$$A \oplus B = B \oplus A;$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$$

что позволяет записывать подобные выражения без скобок и в любом порядке:

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = A \oplus B \oplus C \oplus D = B \oplus A \oplus C \oplus D.$$

Справедливость свойств коммутативности и ассоциативности легко доказать при помощи аксиом (6.3)–(6.6).

В алгебре Жегалкина конъюнкция дистрибутивна относительно суммы по модулю 2:

$$A(B \oplus C) = AB \oplus AC,$$

что позволяет раскрывать скобки и выносить за скобки как отдельные переменные, так и любые выражения.

Но сумма по модулю 2 не дистрибутивна относительно конъюнкции

$$A \oplus BC \neq (A \oplus B)(A \oplus C).$$

Основные соотношения, связывающие операции булевой алгебры с операциями алгебры Жегалкина, имеют вид:

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B; \tag{6.8}$$

$$A + B = A \oplus B \oplus AB. \tag{6.9}$$

Из этих формул выводятся следующие важные частные случаи:

а) пусть $B = 1$, тогда из формулы (6.8) получаем:

$$A \oplus 1 = \overline{A}, \tag{6.10}$$

т. е. инверсия некоторого булева выражения в алгебре Жегалкина представляется как сумма по модулю 2 этого выражения и единицы;

б) из формулы (6.9) следует, что если $f_1 f_2 = 0$, то

$$f_1 + f_2 = f_1 \oplus f_2, \tag{6.11}$$

где f_1 и f_2 – некоторые логические выражения.

в) пусть $f_1 = f_2$, тогда

$$f_1 \oplus f_1 = 0. \tag{6.12}$$

С помощью формул (6.8)–(6.12) всякое булево выражение можно представить полиномом Жегалкина, и наоборот, всякий полином Жегалкина можно перевести в булеву алгебру.

6.5 Упрощение логических выражений в алгебре Жегалкина

Упрощение формул в алгебре Жегалкина осуществляется в основном с помощью соотношения (6.12).

Пример 6.9

Представить в алгебре Жегалкина булево выражение

$$f = AB + \overline{A}C.$$

Поскольку $AB \cdot \overline{A}C = 0,$ то, согласно (6.11),

$$f = AB + \overline{A}C = AB \oplus \overline{A}C.$$

С применением формулы (6.10) получаем:

$$f = AB \oplus \overline{A}C = AB \oplus (A \oplus 1)C = AB \oplus AC \oplus C.$$

Пример 6.10

Представить в алгебре Жегалкина булево выражение

$$f = AB + BC.$$

В этом выражении конъюнкция слагаемых не равна нулю: $AB \cdot BC \neq 0,$ следовательно, по формуле (6.9):

$$f = AB + BC = AB \oplus BC \oplus ABC.$$

Пример 6.11

Представить в булевой алгебре выражение Жегалкина

$$f = AB \oplus AC \oplus BC \oplus ABC.$$

Вынесем за скобки AB и аргумент C:

$$f = AB(1 \oplus C) \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B).$$

Согласно выражению (6.8), получаем:

$$f = AB\overline{C} \oplus C(A \oplus B) = AB\overline{C} \oplus C(A\overline{B} + \overline{A}B) = AB\overline{C} \oplus (A\overline{B}C + \overline{A}BC).$$

Заметим, что

$$AB\overline{C}\cdot(A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0,$$

т. е. конъюнкция слагаемых равна нулю, следовательно, по формуле (6.11) получаем искомый результат:

$$f=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC.$$

. . . .

Пример 6.12

Упростить в алгебре Жегалкина:

$$f=AB\oplus ABC\oplus BC\oplus ABC\oplus BC\oplus ABC\oplus AB\oplus AC.$$

В этом выражении два раза встречается конъюнкция AB, два раза – конъюнкция BC и три раза – конъюнкция ABC. Согласно формуле (6.12), получаем:

$$AB\oplus AB=0;$$

$$BC\oplus BC=0;$$

$$ABC\oplus ABC\oplus ABC=ABC.$$

С учётом этих значений искомая минимальная форма имеет вид

$$f=ABC\oplus AC.$$

Всякое выражение Жегалкина можно представить в СДНФ. Для этого каждую конъюнкцию заменяем дизъюнкцией соответствующих минтермов, после чего все знаки дизъюнкции заменяем знаками суммы по модулю 2. После этого удаляем пары одинаковых минтермов.

Например, представим в СДНФ полином Жегалкина:

$$f(A,B,C)=AB\oplus AC\oplus C. \tag{6.13}$$

Запишем каждую из конъюнкций полинома (6.13) в виде дизъюнкции минтермов:

$$AB=AB\overline{C}\oplus ABC;\quad AC=A\overline{B}C\oplus ABC;\quad C=\overline{A}\overline{B}C\oplus\overline{A}BC\oplus A\overline{B}C\oplus ABC.$$

Их сумма по модулю 2 имеет вид:

$$f=AB\overline{C}\oplus ABC\oplus A\overline{B}C\oplus ABC\oplus\overline{A}\overline{B}C\oplus\overline{A}BC\oplus A\overline{B}C\oplus ABC.$$

Упростим это выражение, применяя свойство (6.12):

$$f=\overline{A}\overline{B}C\oplus\overline{A}BC\oplus AB\overline{C}\oplus ABC=(1,3,6,7). \tag{6.14}$$

Найти СДНФ полинома Жегалкина можно и с помощью карты Вейча. Карта приведена на рисунке 6.21. Наносим на неё конъюнкцию AB, поставив единицы в клетках, относящихся к минтермам 6 и 7. Затем наносим конъюнкцию AC, поставив единицы в клетках минтермов 5 и 7. При этом в клетке минтерма 7 окажется две единицы. Точно так же наносим на карту переменную *C*, поставив единицы в клетках минтермов 1, 3, 5 и 7. Клетки, в которых стоят две единицы, говорят о том, что соответствующие минтермы необходимо удалить. На рисунке 6.21 это клетка минтерма 5. Удаляем две единицы и из клетки минтерма 7. В результате получится карта, приведённая на рисунке 6.22. Согласно этой карте,

$$f = (1, 3, 6, 7),$$

что полностью соответствует выражению (6.14), найденному путём алгебраических преобразований.

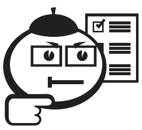
	A	A		
B	1	111	1	
		11	1	
		C	C	

Рис. 6.21

	A	A		
B	1	1	1	
			1	
		C	C	

Рис. 6.22

Подробности об алгебре Жегалкина можно найти в [55].



Упражнения

1. Найдите значения следующих выражений:

1) $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$, $0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$, $1 \oplus 1 \oplus 0$;

2) $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$, $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$, $0 \oplus 1 \oplus 1$.

2. Укажите значения следующих выражений, если $A = B = 1$, $C = 0$:

1) $A \oplus B \oplus C$, $AB \oplus C$, $AC \oplus B$;

2) $B \oplus C \oplus AB$, $ABC \oplus AB$, $A \oplus AB \oplus ABC$.

3. Упростите в алгебре Жегалкина:

1) $f = ABC \oplus BC \oplus AB \oplus BC \oplus BC \oplus AB \oplus BC$;

2) $f = (A \oplus B)(BC \oplus AC) \oplus ABC \oplus AC \oplus ABC$;

3) $f = (A \oplus B)(AB \oplus AC) \oplus ABC$;

4) $f = (AC \oplus AB \oplus BC)(AB \oplus BC) \oplus AB.$

4. Представьте булево выражение в алгебре Жегалкина и упростите:

1) $f = ABC + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$;

2) $f = \overline{A}BC + A\overline{C} + A\overline{B}C$;

3) $f = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

4) $f = AB\overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A}CD + \overline{B}CD.$

5. Найдите минимальные ДНФ в булевой алгебре по заданным выражениям Жегалкина:

1) $f = B(1 \oplus A) \oplus AB \oplus C \oplus BC$;

2) $f = A \oplus C \oplus BC \oplus AC \oplus ABC$;

3) $f = C \oplus AC \oplus ABC \oplus 1.$

. . . .

6.6 Производная от булевой функции

Производная по переменной A от булевой функции $f(A, B, \ldots, L)$ показывает, при каких условиях изменение аргумента A вызывает изменение значения функции $f(A, B, \ldots, L)$. Например, функция

$$f(A, B, C) = A + BC$$

меняет своё значение одновременно с аргументом A в следующих трёх случаях:

а) если $B = C = 0$;

б) если $B = 0$; $C = 1$;

в) если $B = 1$; $C = 0$.

Эти три случая удобно представить в виде булевой функции $\varphi(B, C)$:

$$\varphi(B, C) = \overline{B} + \overline{C}.$$

Функция $\varphi(B, C)$ обладает важным свойством. При $\varphi(B, C) = 1$ функция $f(A, B, C)$ меняет свои значения одновременно с изменением значения аргумента A.

Функцию $\varphi(B, \ldots, L)$ называют *производной* по переменной A от булевой функции $f(A, B, \ldots, L)$ и обозначают:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \varphi(B, \ldots, L).$$

Рассмотрим ещё один пример. Найдем производную по переменной A:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,D + \overline{B}\,C\,D + A\overline{C}\,\overline{D}\,. \tag{6.15}$$

Подставим в это выражение какой-либо набор значений аргументов B, C, D. Получим один из четырех результатов:

$$f = 1; \quad f = 0; \quad f = A; \quad f = \overline{A}\,.$$

Все наборы, на которых $f = A$ или $f = \overline{A}$, образуют функцию $\varphi(B, C, D)$.

Найдем функцию $\varphi(B,C,D)$. Для этого в (6.15) подставим все наборы значений переменных B, C, D и для каждого набора найдем остаточную функцию:

$$f(A,0,0,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$

$$f(A,0,0,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = \overline{A};$$

$$f(A,0,1,0) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = 0;$$

$$f(A,0,1,1) = A\cdot 0 + \overline{A}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = 1;$$

$$f(A,1,0,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 0\cdot 0 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = A;$$

$$f(A,1,0,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 0\cdot 1 + A\cdot\overline{0}\cdot\overline{1} = A;$$

$$f(A,1,1,0) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 1\cdot 0 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{0} = A;$$

$$f(A,1,1,1) = A\cdot 1 + \overline{A}\cdot\overline{1}\cdot 1 + \overline{1}\cdot 1\cdot 1 + A\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = A.$$

Функция f равна A или $\overline{A}$ на шести наборах значений переменных B, C, D. Это наборы 0, 1, 4, 5, 6, 7. Дизъюнкция соответствующих минтермов является искомой производной:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \varphi(B,C,D) = (0,1,4,5,6,7).$$

Если ее минимизировать, то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = B + \overline{C}\,.$$

Найти производную $\frac{\partial f}{\partial A}$ от функции $f(A,B,\ldots,L)$ можно и аналитическим путём. Согласно [14], *производная первого порядка* $\frac{\partial f}{\partial A}$ от функции $f(A,B,\ldots,L)$ записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial A} = f(1,B,\ldots,L) \oplus f(0,B,\ldots,L), \tag{6.16}$$

где $f(1,B,\ldots,L)$ – единичная остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A,B,\ldots,L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить единицами. При этом все логические операции – И, ИЛИ, НЕ – остаются неизменными;

$f(0,B,\ldots,L)$ – нулевая остаточная функция, получающаяся на основе функции $f(A,B,\ldots,L)$, если в ней все вхождения аргумента A заменить нулями.

Согласно (6.8) выражение (6.16) записывается в булевой алгебре (т. е. без знака «⊕») следующим образом:

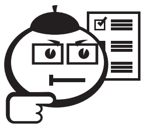
$$\frac{\partial f}{\partial A} = \overline{f(1, B, \ldots, L)} \cdot f(0, B, \ldots, L) + f(1, B, \ldots, L) \cdot \overline{f(0, B, \ldots, L)}.$$

Например, найдем производную первого порядка по переменной A от функции вида

$$f = A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{B}\,\overline{D}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial A} &= (1 \cdot \overline{B}C + \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) \oplus (0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) = \\
&= \overline{(1 \cdot \overline{B}C + \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})}(0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D}) + \\
&+ (1 \cdot \overline{B}C + \overline{1} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})\overline{(0 \cdot \overline{B}C + \overline{0} \cdot BC + \overline{B}\,\overline{D})} = \\
&= \overline{\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D}}(BC + \overline{B}\,\overline{D}) + (\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D})\overline{BC + \overline{B}\,\overline{D}} = \\
&= (B + \overline{C})(B + D)(BC + \overline{B}\,\overline{D}) + (\overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D})(\overline{B} + \overline{C})(B + D) = \\
&= BC + \overline{B}CD = BC + CD.
\end{aligned}$$

. . . .



Упражнения

1. Укажите десятичные наборы значений аргументов A и B, на которых функция $f = AB + C$ меняет свои значения с изменением аргумента C.

2. Укажите десятичные наборы значений аргументов A, B, C, на которых функция $f(A, B, C, D)$ меняет свои значения с изменением аргумента D:

1) $f = AB + CD$;
2) $f = AB + \overline{C}D$;
3) $f = A\overline{B} + C\overline{D}$;
4) $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$.

3. Найдите минимальные ДНФ единичных остаточных функций относительно аргумента A (т. е. при $A = 1$):

1) $f = ABC + BCD + \overline{A}BC$;
2) $f = \overline{A}B + \overline{A}C + AB\overline{C}\,\overline{D}$;
3) $f = AB + \overline{A}B + \overline{A}BCD$;
4) $f = AB + A\overline{B}C + \overline{A}CD$.

4. Найдите минимальные ДНФ нулевых остаточных функций (при $B = 0$):

1) $f = BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$;
2) $f = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}D$;
3) $f = A\overline{C} + BD + A\overline{C}\,\overline{D}$;
4) $f = AB\overline{C} + \overline{A}BC + BD$.

. . . .

6.7 Дифференцирование булевых функций с применением карт Вейча

Чтобы найти производную при помощи карты Вейча, достаточно нанести на неё остаточные функции дифференцируемой функции.

При этом необходимо иметь в виду, что остаточные функции представлены в булевой алгебре, а сами они соединены знаком сложения по модулю 2. Следовательно, единичная остаточная функция наносится на карту Вейча так, как это делается в булевой алгебре, т. е. в каждой клетке указывается не более одной единицы. Нулевая остаточная функция наносится аналогично. В результате в каждой клетке будут либо две единицы, либо одна, либо ни одной. Если в какой-либо клетке стоят две единицы, то заменяем их нулями. В результате получим СДНФ искомой производной.

Можно воспользоваться и тремя картами Вейча: на первые две нанести единичную и нулевую остаточные функции, поставив между ними знак сложения по модулю 2, а на третью – результат суммирования по модулю 2. Поясним это на примере. Найдём производную по переменной A от функции

$$f = AB + \overline{A}C + \overline{A}BD + \overline{B}CD.$$

Остаточные функции имеют вид:

$$f(1, B, C, D) = B + \overline{B}CD;$$

$$f(0, B, C, D) = C + BD + \overline{B}CD.$$

Запишем производную в виде суммы по модулю 2 остаточных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = (B + \overline{B}CD) \oplus (C + BD + \overline{B}CD).$$

Единичную остаточную функцию нанесём на первую карту Вейча (рис. 6.23), нулевую – на вторую. Между ними поставим знак «⊕». Справа расположим третью карту. На ней запишем СДНФ искомой производной. Её минимальная форма имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \overline{B}C\overline{D} + B\overline{C}\,\overline{D}.$$

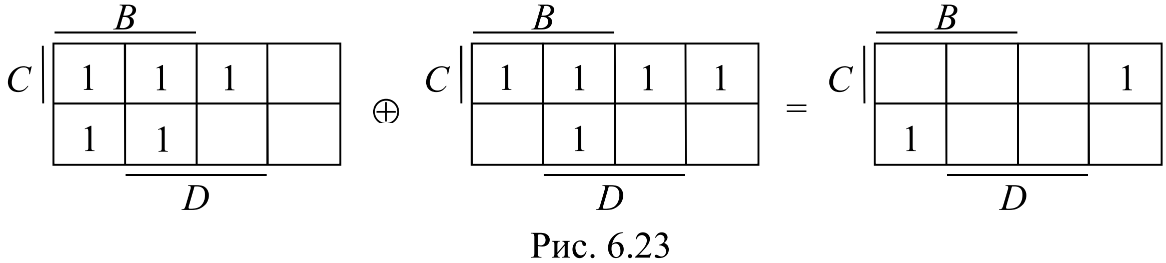
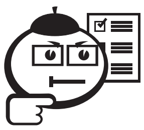


Рис. 6.23



Упражнения

1. Нанесите на карту Вейча функцию

$$f = (AB + CD) \oplus (BC + AD).$$

Сколько всего единиц на карте и сколько на ней клеток, где записано по две единицы?

2. Найдите производную по аргументу E и нанесите её на карту Вейча:

$$f = ABE + BCE + \overline{A}D\overline{E} + B\overline{C}\,\overline{E}.$$

Сколько в производной минтермов и сколько букв в минимальной ДНФ производной?

3. Укажите десятичные номера минтермов функции $\dfrac{\partial f}{\partial E}$, если

$$f = AE + BC + BD + A\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}D.$$

6.8 Симметрические булевы функции

Булева функция называется симметрической, если она инвариантна относительно всякой перестановки ее аргументов [4, с. 54; 14, с. 238; 23, с. 277]. Простейшими примерами симметрических функций являются выражения:

$$f(A,B) = AB, \quad f(A,B) = A + B,$$

так как

$$f = AB = BA, \quad f = A + B = B + A.$$

Если в записи функции содержатся инверсные аргументы, то в некоторых случаях она также может быть симметрической. Например, выражение

$$f = A\overline{B}$$

не относится к классу симметрических функций, поскольку

$$A\overline{B} \neq B\overline{A}.$$

Если же переставить местами буквы в выражении

$$f(A,B) = A\overline{B} + \overline{A}B,$$

то функция не изменится. Следовательно, она является симметрической.

Всего возможно $n!$ перестановок n переменных. Заметим, что при перестановках меняются местами только буквы, а знаки конъюнкции, дизъюнкции и инверсии остаются на своих местах. Рассмотрим, например, функцию

$$f(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}BC.$$

За счёт перестановок переменных получаем следующий список функций:

$$f_1(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}BC;$$

$$f_2(A,C,B) = AC\overline{B} + \overline{A}CB;$$

$$f_3(B,A,C) = BA\overline{C} + \overline{B}AC;$$

$$f_4(C,A,B) = CA\overline{B} + \overline{C}AB;$$

$$f_5(B,C,A) = BC\overline{A} + \overline{B}CA;$$

$$f_6(C,B,A) = CB\overline{A} + \overline{C}BA.$$

В этом списке первое выражение является исходным. Все остальные получены путём перестановки переменных в записях функций. В результате перестановок получилось:

$$f_1(A,B,C) = f_6(C,B,A);$$

$$f_2(A,C,B) = f_5(B,C,A);$$

$$f_3(B,A,C) = f_4(C,A,B).$$

Остальные пары функций образуют неравенства, например:

$$f_1(A,B,C) \neq f_2(A,C,B);$$

$$f_3(B,A,C) \neq f_6(C,B,A).$$

Так как функция остаётся неизменной не при всех перестановках переменных, то в класс симметрических она не входит.

В общем случае симметрическую функцию можно выразить через набор *а-чисел* [48], или *рабочих чисел* [57], где *а*-число (а также рабочее число) показывает, сколько аргументов должны принять единичное значение, чтобы функция также была равной единице. Например, рассмотрим следующую симметрическую функцию:

$$S_4(A,B,C,D,E) = ABC\overline{D}E + AB\overline{C}DE + A\overline{B}CDE + \overline{A}BCDE + ABCD\overline{E},$$

где S_4 – условное обозначение симметрической функции с *а*-числом, равным 4. Эта функция зависит от пяти аргументов и принимает единичное значение только в том случае, когда единичное значение принимают точно четыре аргумента из пяти.

Симметрические функции с одиночными *а*-числами не поддаются минимизации в смысле Квайна, так как все минтермы таких функций являются простыми импликантами. Минимизация возможна лишь при нескольких *а*-числах и при условии, что среди них имеется хотя бы два *а*-числа, разность которых равна единице. Примером может служить симметрическая функция вида $S_{2,3,4}(A,B,C,D)$, содержащая три a-числа. Две пары из этих трёх a-чисел содержат признак возможности минимизации. Это a-числа 2 и 3, а также 3 и 4. СДНФ функции имеет вид:

$$S_{2,3,4}(A,B,C,D) = (3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15).$$

Минимизируем ее, например, при помощи карты Вейча:

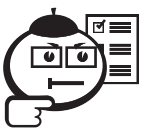
$$S_{2,3,4}(A,B,C,D) = AB + AC + AD + BC + BD + CD.$$

Среди симметрических функций n переменных особое значение имеют две функции, получившие названия «чёт» и «нечёт»: $f_{\text{чёт}}$ и $f_{\text{нечёт}}$. Первая из них состоит из всех чётных a-чисел, вторая – из всех нечётных. Например, при $n = 6$ функции $f_{\text{чёт}}$ и $f_{\text{нечёт}}$ имеют вид:

$$f_{\text{чёт}} = S_{0,2,4,6}(A,B,C,D,E,F);$$

$$f_{\text{нечёт}} = S_{1,3,5}(A,B,C,D,E,F).$$

В СДНФ этих функций нет ни одной пары склеивающихся минтермов, следовательно, обе функции не поддаются минимизации (по Квайну), т. е. все входящие в них минтермы являются простыми импликантами, а сокращённые, тупиковые и минимальные ДНФ совпадают с СДНФ. На карте Вейча единицы функций $f_{\text{чёт}}$ и $f_{\text{нечёт}}$ располагаются в шахматном порядке.



Упражнения

1. Сколько конъюнкций содержит ДНФ симметрической функции семи переменных, если её a-число равно 3?

2. Укажите номера функций, в которых имеются склеивающиеся минтермы (все функции зависят от переменных A, B, C, D, E, F):

1) $S_{0,2,4,6}$; 2) $S_{0,3,4}$; 3) $S_{0,1,4,6}$; 4) $S_{0,2,5,6}$; 5) $S_{0,4,6}$; 6) $S_{0,2,5}$; 7) $S_{0,3,4,5}$.

3. Укажите номера симметрических функций:

1) $f = 0$; 2) $f = 1$; 3) $f(A,B) = \overline{A}\overline{B}$; 4) $f(A,B) = A$; 5) $f(A,B) = \overline{A}$.

7 Булева алгебра и контактные структуры

7.1 Вводные сведения

Контактный элемент – это устройство, замыкающее и размыкающее электрическую цепь. К контактным элементам относятся кнопки, тумблеры, электромагнитные реле. Принцип их работы носит четко выраженный двоичный характер: «включено – выключено», без каких-либо промежуточных состояний. Такие элементы называют бистабильными.

Контактные схемы, построенные из бистабильных элементов, распадаются на два непересекающихся класса:

1) параллельно-последовательные схемы;
2) мостиковые структуры.

В первом случае для упрощения переключательных схем широко применяется булева алгебра, особенно такие её разделы, как минимизация нормальных (дизъюнктивных и конъюнктивных) форм булевых функций и повышение их порядка, в пределе сводящееся к поиску абсолютно минимальных форм.

В классе мостиковых контактных структур булева алгебра также находит применение, но в этой сфере её значение по сравнению с параллельно-последовательными схемами существенно ниже. Здесь всё зависит от изобретательности и инженерной смекалки разработчика, занятого поиском экономичных решений, так как для структур мостикового типа до сих пор не найдены практические методы, при помощи которых обеспечивалась бы возможность нахождения предельно экономичных контактных структур.

Контактные схемы разрабатываются в два этапа. На первом этапе выполняется только логический расчёт. Его результатом является контактная схема, где указаны все электрические соединения переключающих элементов, характеризующихся только одним свойством – соединять или разъединять какие-либо точки электротехнического устройства. На втором этапе выбираются контактные элементы с необходимыми техническими характеристиками, такими как величина коммутируемого тока, рабочее напряжение, скорость переключения и т. д. Первый этап является важнейшим. Ошибка в логической схеме, как правило, полностью обесценивает работу не только первого этапа, но и второго. В связи с этим в данном пособии всё внимание уделено только первому этапу, т. е. вопросам логического проектирования контактных структур.

7.2 Тумблеры

Одним из наиболее простых контактных элементов является тумблер. На рисунке 7.1, *а* показано условное обозначение простейшего двухпозиционного тумблера, имеющего два вывода: *m* и *n*. Тумблеры обычно имеют два равноправных устойчивых состояния. Одно из них условно называют «включено», другое – «выключено». Из одного состояния в другое тумблер переводится при помощи специальной ручки, переключающего рычажка. Какое состояние считается включенным, а какое – выключенным, обычно определяется по положению переключающей ручки тумблера, установленного на каком-либо щитке. Нижнее положение ручки, как правило, обозначает «выключено», верхнее – «включено».

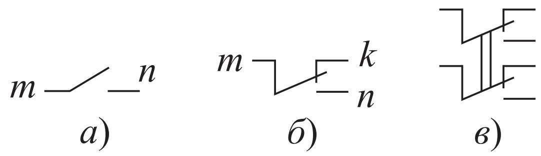


Рис. 7.1

На рисунке 7.1, *б* показан переключательный тумблер с тремя выводами. В одном положении тумблера замкнуты контакты *m* и *k* (точки *m* и *n* разомкнуты), а в другом – контакты *m* и *k* размыкаются, а контакты *m* и *n* замыкаются.

На рисунке 7.1, *в* представлен сдвоенный переключательный тумблер. На нём изображены две параллельные линии, соединяющие подвижные контакты обеих групп. Но эти линии не являются токопроводящими. Их назначение: показать, что переключение осуществляется одновременно всеми контактами, через которые проходят эти параллельные линии.

7.3 Кнопки

Для обыкновенных кнопок, в отличие от тумблеров, характерно лишь одно устойчивое состояние – исходное. Если кнопку нажать, то она переходит в другое состояние, но только на время, пока она нажата. После отпускания кнопка под действием специальной пружины переходит в исходное положение.

На рисунке 7.2, *а* изображена кнопка с нормально разомкнутым контактом. Слово «нормально» говорит о том, что контакт изображен в состоянии, когда кнопка не нажата.

На рисунке 7.2, *б* приведено условное изображение кнопки с нормально замкнутым контактом. В исходном состоянии, когда кнопка не нажата, выводы *m* и *k* соединены. Если же кнопку нажать, то между ними не будет проводимости. После отпускания кнопки выводы *m* и *k* соединятся снова. На рисунке 7.2, *в* приведена кнопка с двумя группами переключательных контактов.

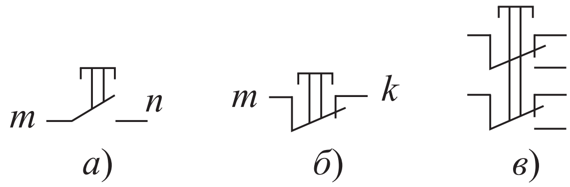


Рис. 7.2

В общем случае одна и та же кнопка может объединять в своей конструкции несколько нормально разомкнутых и несколько нормально замкнутых контактов. Пример такой кнопки приведен на рисунке 7.3. Если её нажать, то все нормально разомкнутые контакты замкнутся, а все нормально замкнутые разомкнутся. При отпускании кнопки все контакты вернутся в исходное состояние.

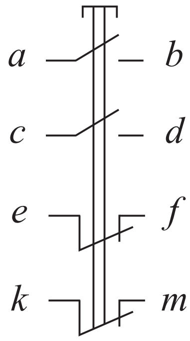


Рис. 7.3

Кроме кнопок и тумблеров, изображённых на рисунках 7.1–7.3, в технике применяются и многопозиционные переключатели. Например, на рисунке 7.4, *а* показан трёхпозиционный переключатель, а на рисунке 7.4, *б* – шестипозиционный.

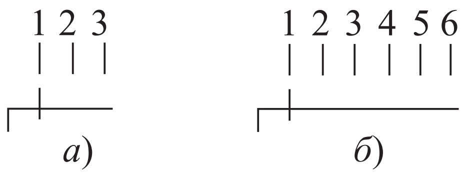


Рис. 7.4

7.4 Электромагнитные реле

Ещё одним контактным элементом, получившим широчайшее применение в промышленности, является электромагнитное реле. Его схематическое изображение представлено на рисунке 7.5. Изменение состояния контактов реле вызывается электрическим током, подаваемым на обмотку электромагнита, имеющегося у каждого реле. На рисунке 7.5 обмотка показана несколькими витками. Реальные же реле содержат, как правило, сотни и тысячи витков тонкой медной проволоки, покрытой слоем какого-либо диэлектрика. Под действием протекающего по обмотке тока стальной сердечник превращается в электромагнит, который притягивает якорь, изготовленный также из стали. Якорь, поворачиваясь вокруг оси, через диэлектрические штанги отклоняет подвижные упругие контактные пластины (выводы *1* и *3* на рис. 7.5) и замыкает их с неподвижными пластинами *2* и *4*.

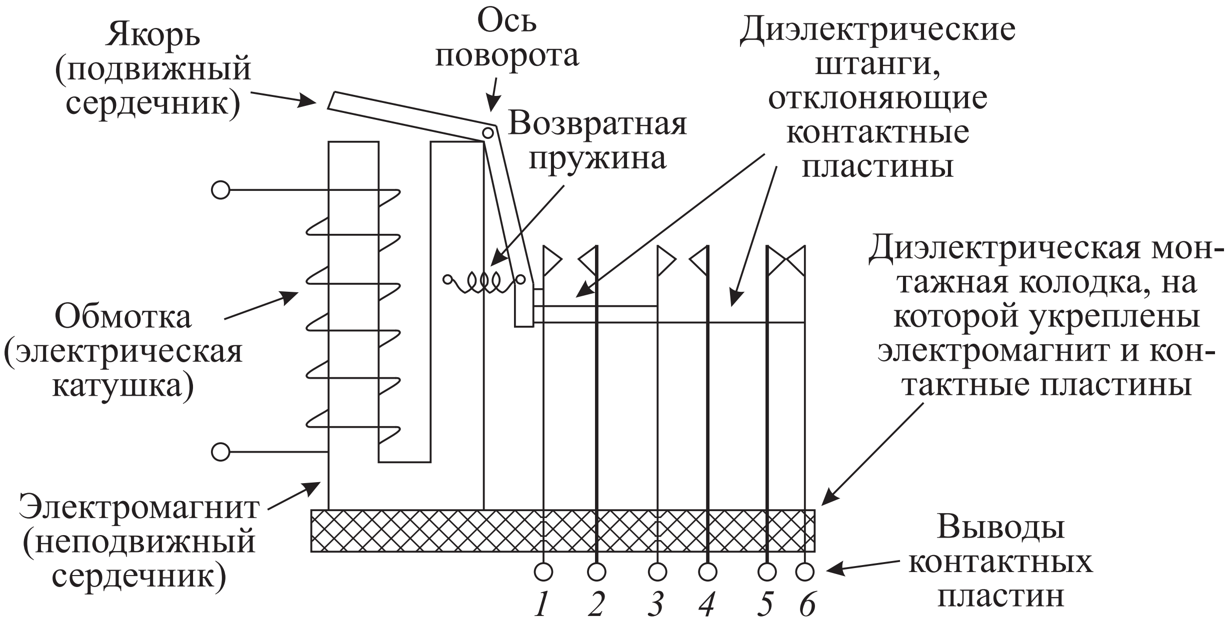


Рис. 7.5

Пара контактных пластин *5* и *6* при выключенном реле находится в замкнутом состоянии. Если по обмотке пропустить ток, то якорь отклонит подвижную пластину *6* и контактная пара разомкнётся. При отключении тока якорь под действием возвратной пружины приходит в исходное состояние.

Условное изображение электромагнитного реле показано на рисунке 7.6, где прямоугольником обозначена обмотка электромагнита. Реле на этом рисунке содержит два нормально разомкнутых контакта, один нормально замкнутый и одну переключательную группу.

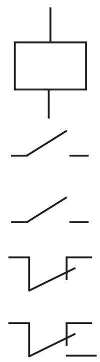


Рис. 7.6

7.5 Контактная интерпретация булевых формул

Интерпретация (лат. *interpretation* – разъяснение, истолкование) – это приписывание символам и формулам формальной системы определенного содержания, смысла, значения. Пусть множество параллельно-последовательных контактных структур образует систему *A*, а множество аналитически заданных булевых функций произвольного порядка образует систему *B*. Рассмотрим отношения между элементами систем *A* и *B* и их интерпретацию.

Если логический аргумент принимает единичное значение, то нормально разомкнутый контакт соответствующего реле замкнут (а нормально замкнутый – разомкнут). И наоборот: если нормально разомкнутый контакт реле замкнут (а нормально замкнутый – разомкнут), то соответствующий логический аргумент принимает единичное значение.

Если логический аргумент принимает нулевое значение, то нормально разомкнутый контакт соответствующего реле разомкнут (а нормально замкнутый – замкнут). И наоборот: если нормально разомкнутый контакт реле разомкнут (а нормально замкнутый – замкнут), то соответствующий логический аргумент принимает нулевое значение.

Аналогично интерпретируются функции: если булева функция равна нулю, то соответствующая контактная цепь разомкнута. И наоборот, если цепь разомкнута, то соответствующая булева функция равна нулю. Если булева функция равна единице, то соответствующая цепь контактов замкнута. И наоборот, если цепь замкнута, то соответствующая булева функция принимает единичное значение.

Между элементами системы *A* существуют отношения: контакты могут соединяться параллельно или последовательно. Отношения между элементами системы *B*: логические переменные могут соединяться знаками конъюнкции или дизъюнкции. В этом случае имеет место интерпретация: логическая операция дизъюнкции обозначает параллельное соединение контактов, и наоборот, параллельному соединению контактов соответствует операция дизъюнкции. Конъюнкция обозначает последовательное соединение контактов, и последовательному соединению контактов соответствует операция конъюнкции.

Таким образом, формальная двоичная логическая система, ограниченная булевыми функциями произвольного порядка, является логико-математической моделью контактных структур параллельно-последовательного типа.

7.6 Примеры построения контактных схем

Пример 7.1

Построить контактную схему, если булева функция имеет вид

$$f = A\overline{B}C\overline{D}.$$

Функция представлена конъюнкцией четырёх переменных, среди которых переменные A и C являются нормально разомкнутыми, а остальные – нормально замкнутыми. В соответствии с интерпретацией, рассмотренной в предыдущем параграфе, контакты соединяем последовательно. При этом для определённости на схеме изобразим лампу, управляемую заданной контактной схемой (рис. 7.7).

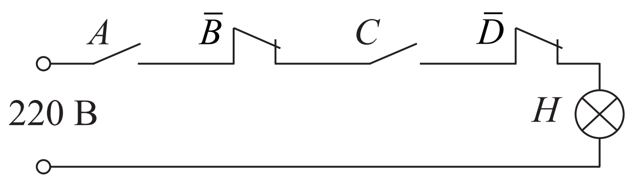


Рис. 7.7

Если схема не входит в состав технической документации, то контактные структуры могут быть представлены в упрощённом виде, без изображения контактов, так, как показано на рисунке 7.8, где приведена та же схема, что и на рисунке 7.7. Потери информации при этом не происходит: если буква не содержит инверсии, то ей соответствует нормально разомкнутый контакт; инверсная же буква обозначает, что контакт является нормально замкнутым. Но при изображении переключательных групп следует избегать их упрощённого представления.

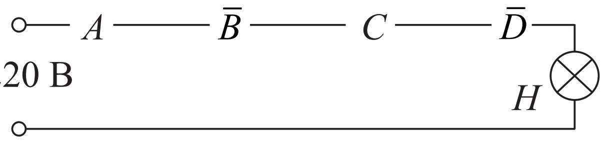


Рис. 7.8

Пример 7.2

Построить контактную схему, если задана булева функция, имеющая вид

$$f = \overline{A} + B + C + \overline{D},$$

где логическим переменным соответствуют тумблеры с теми же обозначениями A, B, C, D. В отличие от предыдущего случая, схема представляет собой параллельное соединение контактов. Среди них два контакта не содержат инверсий (рис. 7.9).

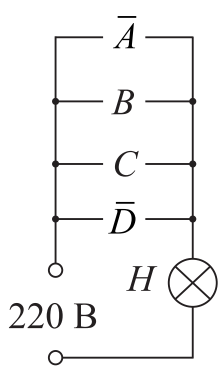


Рис. 7.9

Пример 7.3

Построить контактную структуру, соответствующую ДНФ булевой функции вида

$$f = \overline{A}BC + \overline{A}BD + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{E}.$$

Согласно этому выражению четыре цепи последовательно соединённых контактов должны быть включены параллельно. Кроме того, в заданной функции присутствует инверсная переменная $\overline{E}$. Ей соответствует нормально замкнутый контакт реле E. Его рассматриваем, как пятую цепь, представляющую собой частный случай последовательно соединённых контактов. Таким образом, согласно заданной функции контактная схема состоит из пяти параллельно соединённых цепей (рис. 7.10).

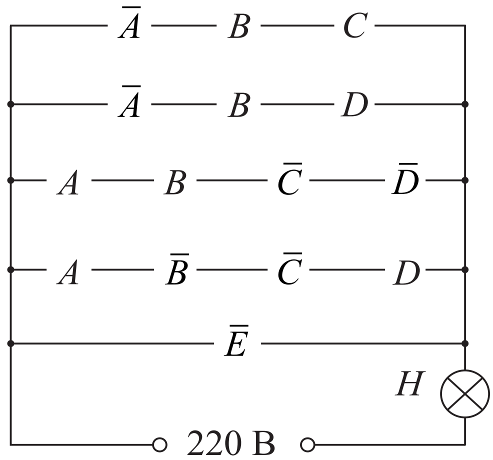


Рис. 7.10

Пример 7.4

Построить контактную структуру, соответствующую КНФ следующей булевой функции:

$$f = (\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + D)(A + B + \bar{C} + \bar{D})E.$$

В отличие от предыдущей схемы, моделирующей ДНФ булевой функции, в данном случае последовательно соединяются группы параллельно соединённых контактов. При этом контакт E рассматривается как частный случай группы параллельных контактных соединений, когда в группе находится лишь один контакт. Схема приведена на рисунке 7.11.

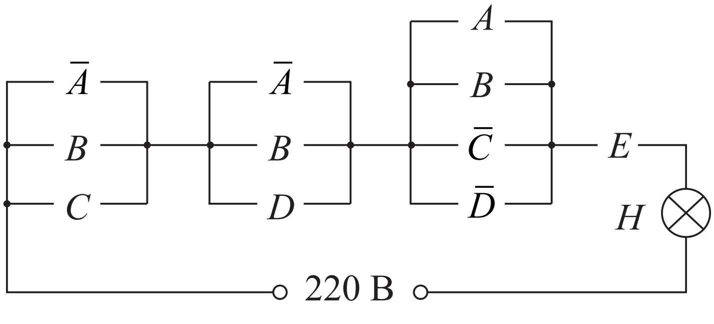


Рис. 7.11

Пример 7.5

Построить контактную структуру на основе булевой функции пятого порядка:

$$f = [(\overline{A} + BC + D)(\overline{A} + B + E) + K](A + B + \overline{C} + \overline{D})PQ.$$

Строится схема следующим образом. Сначала последовательно соединяем контакты B и C. Получившуюся цепь включаем параллельно с контактами $\overline{A}$ и D. Затем последовательно с ними включаем параллельно соединённые контакты $\overline{A}$, B и E. Получится схема с выводами a и c (рис. 7.12). К этим точкам присоединяем контакт K. Аналогично достраиваем оставшуюся часть схемы.

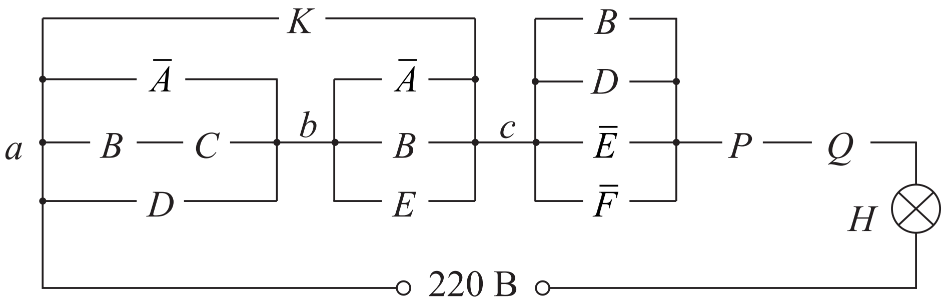


Рис. 7.12

Анализируем получившуюся контактную структуру. Первый порядок в заданной функции образует конъюнкция между круглыми и квадратными скобками, а также переменными P и Q. На рисунке 7.12 точка c делит схему на левую и правую части. В левой части (между точками a и c) находится схема, соответствующая выражению, записанному в квадратных скобках. Согласно этому выражению дизъюнкция между переменной K и круглыми скобками даёт второй порядок. На рисунке 7.12 контакт K включён параллельно цепи, расположенной между точками a и c. Третий порядок образует конъюнкция между круглыми скобками. На рисунке 7.12 это точка b. В левых круглых скобках заданной функции записано выражение второго порядка. Ему соответствует контактная схема на рисунке 7.12, размещённая между точками a и b.

Подобным образом можно построить контактную структуру на основе любой булевой функции.

Отметим ещё раз, что взаимно однозначное соответствие существует только между булевыми функциями и параллельно-последовательными контактными схемами. Если выйти в область мостиковых структур, то соответствие взаимной однозначности нарушится, так как всякой мостиковой контактной структуре соответствует единственная булева функция, но для произвольной булевой функции всегда можно изобразить только параллельно-последовательную схему. А что касается мостиковых структур, то до сих пор нет алгоритмов, позволяющих строить абсолютно экономичные мостиковые схемы, за исключением некоторых частных случаев, например, симметрических контактных структур Клода Шеннона [23]. Следовательно, булева модель распространяется только на параллельно-последовательные контактные структуры.

7.7 Примеры синтеза простейших контактных структур

Пример 7.6

Дано: тумблер A с одним контактом, работающим на замыкание, и две осветительные лампы H_1 и H_2. Требуется соединить их так, чтобы при одном положении тумблера горела одна лампа, а при другом – обе.

Для решения этой задачи нет необходимости привлекать булеву алгебру, вполне достаточно обычных рассуждений. Одну лампу подключим непосредственно к сетевому напряжению, а вторую – через тумблер, т. е. контакт тумблера соединим последовательно со второй лампой и получившуюся цепь подключим к сети либо параллельно первой лампе (рис. 7.13).

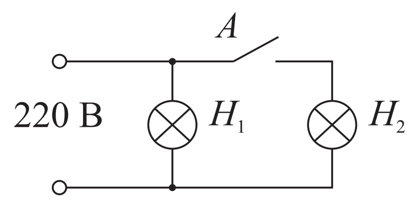


Рис. 7.13

Пример 7.7

Дано: тумблер A с одной переключательной группой контактов и три осветительные лампы H_1, H_2, H_3. Требуется подключить этот тумблер и лампы к сетевому напряжению так, чтобы при одном положении тумблера горела только лампа H_1, а при другом – H_2 и H_3. Лампа H_1 при этом гаснет.

И здесь, как и в предыдущем случае, достаточно обычных рассуждений, т. е. вполне можно обойтись без булевой алгебры. Замкнутым контактом подключим к сети лампу H_1, а лампы H_2 и H_3 сначала соединим параллельно, а затем подключим к сети через разомкнутый контакт (рис. 7.14).

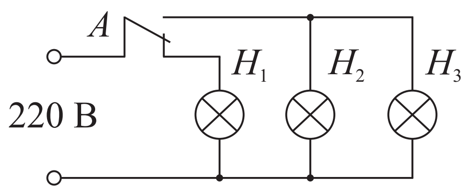


Рис. 7.14

Пример 7.8

Дано: два тумблера, содержащие по одной переключательной группе контактов, и осветительная лампа. Лампа горит, если оба тумблера включены или выключены. Если же включен только один тумблер, то лампа не горит. Построить контактную структуру, управляющую лампой согласно этим условиям.

Чтобы найти булеву функцию, описывающую работу искомой схемы, также нет необходимости строить таблицу истинности. Непосредственно из условия следует, что

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B},$$

где A и B – тумблеры и они же логические переменные, интерпретируемые, как показано в предыдущем подразделе; f – функция, соответствующая состоянию лампы с той же интерпретацией: лампа горит, если цепь замкнута, т. е. $f = 1$, и лампа не горит в противоположном случае. Схема, соответствующая этой функции, приведена на рисунке 7.15.

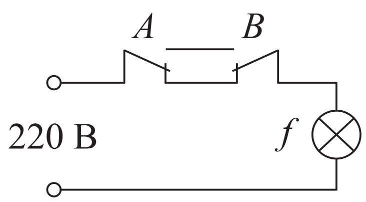


Рис. 7.15

На практике эта структура известна как схема управления одной лампой с двух мест [37, с. 260]. Согласно схеме, как она изображена на рисунке 7.15, лампа горит. Выключить её можно любым тумблером. Например, тумблер A

переведём в верхнее положение. Лампа погаснет. Включить её можно также любым тумблером, например переводом в верхнее положение тумблера *B*. Теперь в единичном положении находятся оба тумблера. Любым из них лампу можно выключить и т. д. Общее решение задачи управления лампой с любого числа мест приведено в [23].

Пример 7.9

Дано: три тумблера *A*, *B* и *C*, содержащие по одному замыкающему контакту, и три лампы накаливания H_1, H_2, H_3. Требуется построить контактную структуру, работающую следующим образом. Если тумблер *A* выключен (т. е. $A = 0$), то все лампы выключены, причём не горят они независимо от состояний тумблеров *B* и *C*. Если $A = 1$, то горит лампа H_1 также независимо от состояний тумблеров *B* и *C*, но при $B = 0$ лампы H_2 и H_3 не горят независимо от состояния тумблера *C*. Если же $A = B = 1$, то горит лампа H_2 независимо от состояния тумблера *C*. При $A = B = 1$ и $C = 0$ лампа H_3 не горит. При $A = B = C = 1$ горят все три лампы.

Булевы функции, описывающие работу искомой структуры, можно составить, как и ранее, без таблицы истинности. Однако во избежание каких-либо ошибок всё же лучше перечисленные условия работы схемы отразить в таблице (табл. 7.1).

Таблица 7.1

№	A	B	C	H_1	H_2	H_3
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1

Три тумблера – *A*, *B* и *C* – имеют восемь двоичных состояний. Все они перечислены в левой половине таблицы 7.1. В трёх правых колонках размещены функции H_1, H_2 и H_3, описывающие состояния соответствующих ламп. Так как при $A = 0$ все лампы не горят, то во всех трёх правых колонках первых четырёх строк ставим нули. При $A = 1$ горит лампа H_1. Отмечаем это единицами в строках 4, 5, 6, 7 колонки H_1. Согласно условию, при $A = 1$ и $B = 0$ лампы H_2 и H_3 не горят. В связи с этим в строках 4 и 5 колонок H_2 и H_3 записываем нули. При $A = B = 1$, $C = 0$ лампа H_3 не горит. Отмечаем это нулём в строке 6 колонки H_3. При $A = B = C = 1$ горят все лампы, поэтому в последней строке колонки H_3 записываем единицу.

Минимальные ДНФ функций H_1, H_2 и H_3 имеют вид:

$$H_1 = A; \quad H_2 = AB; \quad H_3 = ABC.$$

Если схему построить непосредственно по этим функциям, то получится структура, показанная на рисунке 7.16. Очевидно, что эта схема не удовлетворяет условию задачи по числу контактных групп тумблеров. Поэтому упрощение необходимо продолжить.

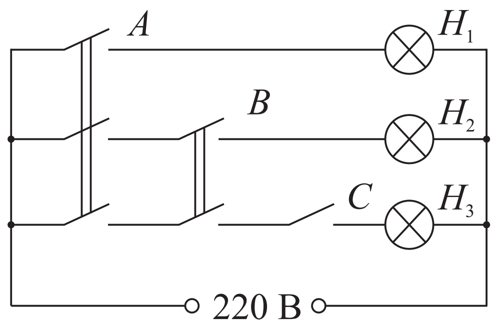


Рис. 7.16

В данном случае систему функций представим в виде:

$$H_1 = A; \quad H_2 = H_1B; \quad H_3 = H_2C.$$

Соответствующая структура приведена на рисунке 7.17, она полностью удовлетворяет требованиям, сформулированным в условии задачи.

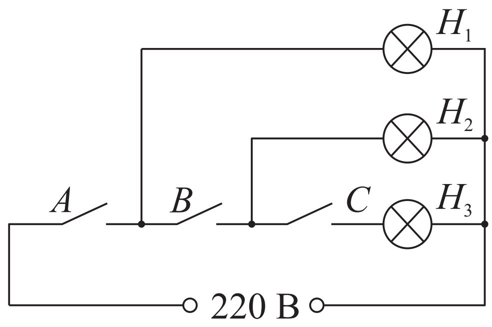


Рис. 7.17

. . . .

Пример 7.10

Дано: две осветительные лампы H_1 и H_2 одинаковой мощности, соединённые последовательно и подключенные к сети переменного тока напряжением 220 В, и две кнопки *A* и *B*. Когда кнопки не нажаты, лампы горят вполнакала (т. е. соединены последовательно). При нажатии кнопки *A* лампа H_1 гаснет, а лампа H_2 горит в полный накал. Если же нажать кнопку *B*, то в полный накал загорается лампа H_1, а лампа H_2 гаснет. Если кнопки *A* и *B* нажать одновременно, то обе лампы горят вполнакала. Требуется построить контактную структуру, работающую в соответствии с этими условиями.

Представим работу схемы в виде таблицы. На рисунке 7.18 лампы соединены последовательно и включены в сеть 220 В. Если замкнуть точки *1* и *2*, то лампа H_1 погаснет, а лампа H_2 будет гореть в полный накал. Отмечаем это в таблице 7.2: в колонке *1–2* ставим единицу на пересечении со строкой 10, где указано: $A = 1$ (кнопка *A* нажата) и $B = 0$ (кнопка *B* не нажата). Это значит, что при нажатии кнопки *A* точки *1* и *2* соединятся между собой. В колонке *2–3* ставим нуль (иначе будет короткое замыкание). Аналогичный случай в строке 01, где указано, что при нажатии кнопки *B* соединятся точки *2* и *3*. В строках 00 и 11 ставим нули, так как в обоих случаях лампы должны быть соединены последовательно.

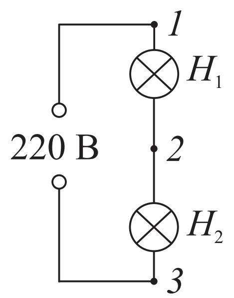


Рис. 7.18

Таблица 7.2

A B	1–2	2–3
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	1	0
1 1	0	0

Булевы функции (табл. 7.2), описывающие работу схемы, имеют вид:

$$f_{1-2} = A\overline{B}; \quad f_{2-3} = \overline{A}B.$$

Соответствующая схема приведена на рисунке 7.19.

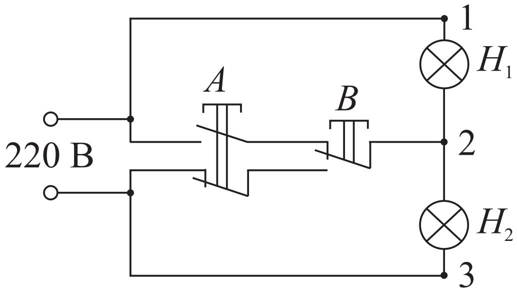
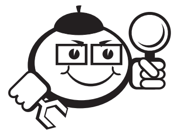


Рис. 7.19



Пример 7.11

Четыре осветительные лампы – H_1, H_2, H_3 и H_4 – управляются четырьмя кнопками – A_1, A_2, A_3 и A_4 – следующим образом: если ни одна кнопка не нажата, то все лампы погашены. При нажатии i-й кнопки горят первые i ламп (i = 1, 2, 3, 4). Каждая кнопка содержит одну переключательную группу контактов. Одновременно две и более кнопок не могут быть нажаты.

Поставим в соответствие лампам H_1, H_2, H_3, H_4 функции H_1, H_2, H_3, H_4, зависящие от переменных A_1, A_2, A_3, A_4. Если $A_i = 1$, то горят первые i ламп.

Всего необходимо рассмотреть пять случаев:

0000 – ни одна кнопка не нажата, все лампы не горят;

1000 – нажата кнопка A_1; горит одна лампа. Допустим, что это лампа H_1;

0100 – нажата кнопка A_2; горят две лампы. Пусть это будут H_1 и H_2;

0010 – нажата кнопка A_3; горят три лампы, например H_1, H_2 и H_3;

0001 – нажата кнопка A_4; гореть должны все лампы.

Можно составить таблицу истинности, отметив в ней как неопределённые состояния следующие наборы значений переменных A_1, A_2, A_3 и A_4:

3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

В их двоичных кодах содержится две единицы или более. После минимизации получим следующий список минимальных ДНФ:

$$H_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4;$$

$$H_2 = A_2 + A_3 + A_4;$$

$$H_3 = A_3 + A_4;$$

$$H_4 = A_4.$$

Если на основе этих функций построить контактную структуру, то окажутся невыполненными условия по числу контактов кнопок. Один из вариантов решения, удовлетворяющий заданным условиям, приведён на рисунке 7.20.

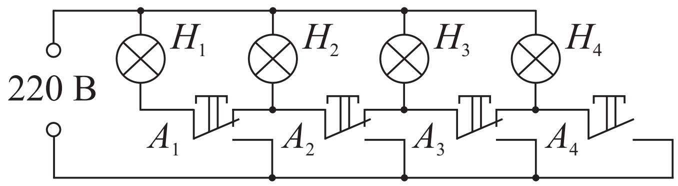


Рис. 7.20

. . . .

7.8 Задача о звонке и осветительных лампах

Схема содержит электрический звонок, n осветительных ламп и n кнопок. Каждая кнопка содержит один нормально разомкнутый контакт и один нормально замкнутый (i = 1, 2, 3, …, n). Схема работает следующим образом:

1) при нажатии i-й кнопки загорается i-я лампа и одновременно звенит звонок. При отпускании кнопки лампа гаснет и звонок умолкает;
2) если i-я лампа перегорит, то с нажатием i-й кнопки лишь звенит звонок.

Для определённости примем n = 5. Обычный логический расчёт приводит к следующей системе булевых функций:

$$f_{\text{зв.}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5;$$

$$f_1 = A_1;\ f_2 = A_2;\ f_3 = A_3;\ f_4 = A_4;\ f_5 = A_5,$$

где $f_{\text{зв.}}$ – функция, описывающая работу схемы, управляющей звонком; f_i – функция, описывающая работу схемы, управляющей лампой A_i (i = 1, 2, …, 5). Схема, построенная на основе этих функций, приведена на рисунке 7.21.

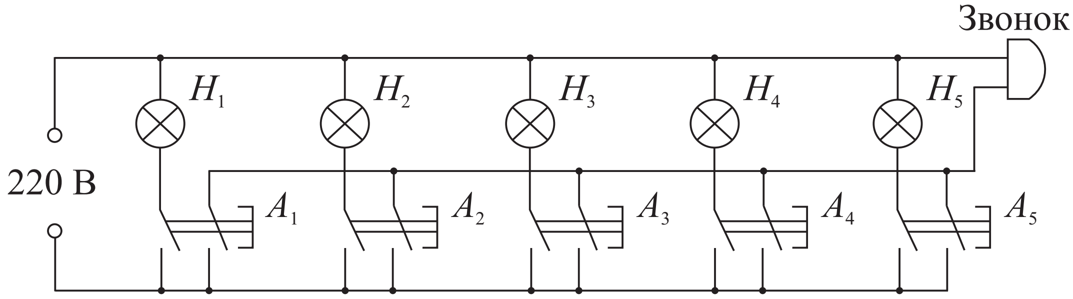


Рис. 7.21

Из схемы видно, что для её реализации необходимы кнопки, содержащие по два нормально разомкнутых контакта, а согласно условию даны другие кнопки, содержащие один нормально замкнутый контакт и один нормально разомкнутый.

Эта задача относится к разряду головоломок, поэтому при её решении от булевой алгебры мало пользы. Решение приведено на рисунке 7.22. Из него видно, что схема может быть расширена на любое число ламп и кнопок.

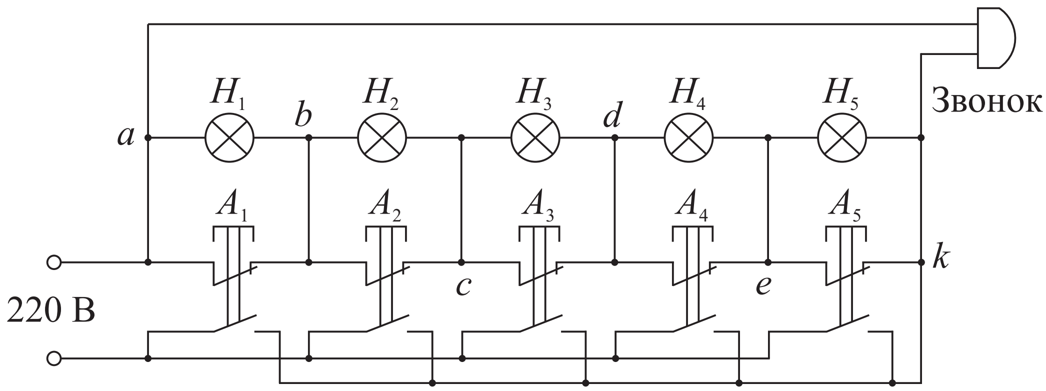
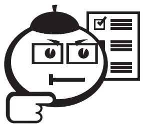


Рис. 7.22

Работает схема следующим образом. Пока кнопки не нажаты, звонок не звенит, и лампы не горят. Нажмём кнопку A_1. Её первый сверху контакт разомкнётся и лампа H_1 подключится к источнику напряжения 220 В. Вторым контактом кнопки A_1 замкнётся цепь звонка. Таким образом, с нажатием кнопки A_1 горит лампа H_1 и звенит звонок. Если лампа H_1 окажется перегоревшей, то с нажатием кнопки A_1 звенит звонок, а лампа H_1 не горит. То же самое относится и ко всем остальным кнопкам.



Упражнения

1. Укажите вопросы, на которые Вы ответите утвердительно.

а. Допустим, что из пяти ламп на рисунке 7.22 лампа H_2 перегорела. Будет ли гореть лампа H_1, если нажать кнопку A_1?

б. Пусть перегоревшими являются лампы H_1 и H_2 (рис. 7.22). Будет ли звенеть звонок, если нажать кнопку A_2?

в. Крайний случай: перегорели все лампы на рисунке 7.22. Нажали кнопку A_2. Будет ли звенеть звонок?

г. На рисунке 7.22 лампа H_1 перегорела, остальные исправны. Нажали одновременно кнопки A_1 и A_2. Будет ли гореть лампа H_2?

д. На рисунке 7.22 лампа H_1 перегорела, остальные исправны. Нажали одновременно кнопки A_1 и A_5. Будет ли гореть лампа H_5?

е. На рисунке 7.22 все лампы исправны. Нажали одновременно все кнопки. Верно ли, что гореть будет только одна лампа H_1?

ж. Лампа H_2 перегорела (рис. 7.22). Будет ли гореть лампа H_1, если одновременно нажать кнопки A_1 и A_2?

2. На рисунке 7.22 все лампы одинаковой мощности. Сколько вольт покажет вольтметр, если при ненажатых кнопках его подключить к точкам a и k? b и d?

3. На рисунке 7.22 все лампы одинаковой мощности. Нажали кнопку A_1. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам a и b? a и e?

4. На рисунке 7.22 все лампы одинаковой мощности. Одновременно нажали кнопки A_1 и A_2. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам a и b? b и d? c и k? a и e?

. . . .

7.9 Инверсные структуры

Суть задач, рассматриваемых в данном параграфе, состоит в следующем. Дана контактная структура, реализующая булеву функцию f. Требуется построить на её основе инверсную структуру, т. е. реализующую булеву функцию $\overline{f}$.

Если заданная схема является параллельно-последовательной, то можно сначала найти соответствующую ей булеву функцию f, затем – её инверсию $\overline{f}$, представить инверсию $\overline{f}$ в минимальной ДНФ или КНФ, повысить порядок (если это возможно) и построить искомую структуру. Очевидно, что получившаяся схема будет параллельно-последовательной. Если окажется, что в этой схеме содержится больше контактов по сравнению с исходной, то следует воспользоваться методом построения двойственных графов, так как с его применением обеспечивается возможность построения инверсных структур с тем же числом контактов, что и в исходной структуре.

В случае мостиковых структур также можно строить параллельно-последовательные схемы, но они обычно сложнее мостиковых, поэтому следует сразу обратиться к теории графов, если граф схемы является планарным. Построение инверсной структуры проиллюстрируем на примере рисунка 7.23.

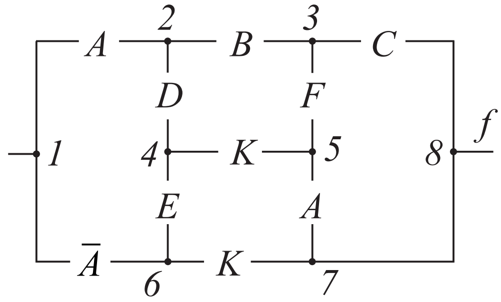


Рис. 7.23

Пронумеруем точки соединений проводов на рисунке 7.23 и представим двухполюсник в виде плоского графа (рис. 7.24). Проведем мысленно осевую линию через вершины *1* и *8* (полюса схемы). Тогда бесконечная грань разделится на две части. В верхней части бесконечной грани поставим вершину *a*, в нижней – вершину *m*. Внутренним граням поставим в соответствие вершины *b*, *c*, *d*, *e*. Соединим вершины *a*, *b*, *c*, *d*, *e, m* так, как это описано в п. 3.8. Получившийся инверсный граф изображен пунктиром. На его основе строим искомый двухполюсник. Ребру {1,2} (рис. 7.24) соответствует контакт *A* (рис. 7.23). Это ребро пересекает ребро {*a*,*b*} двойственного графа (рис. 7.24). Следовательно, точки *a* и *b* инверсной структуры соединяем контактом $\bar{A}$. Аналогичным образом заменяем инверсными контактами все ребра двойственного графа. Получилась инверсная структура (рис. 7.25), содержащая 10 контактов, т. е. столько же, сколько и в случае заданной схемы. Её полюсами являются выводы *a* и *m*.

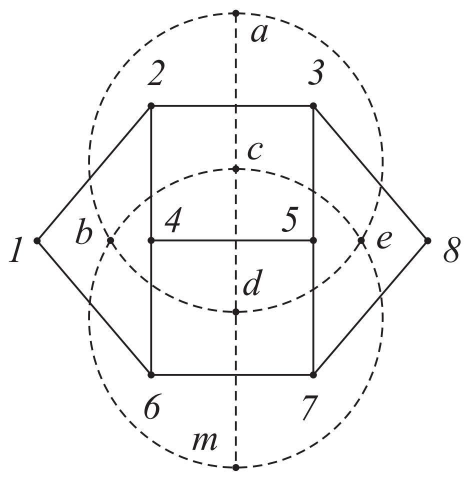


Рис. 7.24

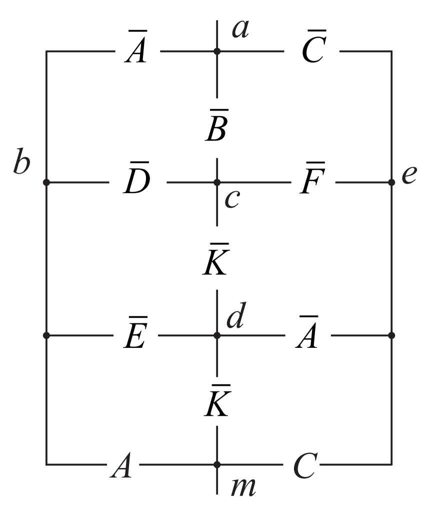


Рис. 7.25

Способ нахождения инверсных структур с применением теории графов является высокоэффективным, но применим только к таким контактным структурам, которым соответствуют планарные графы.

Упражнения

1. На рисунке 7.26 изображена мостиковая структура.

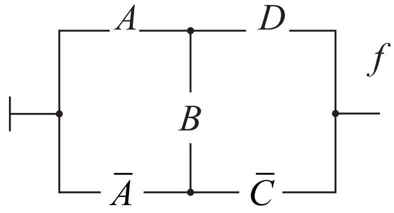


Рис. 7.26

а. Укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных букв минимальной ДНФ функции f.

б. Перечислите (в порядке возрастания) номера минтермов функции f.

в. Перечислите (в порядке возрастания) номера минтермов функции $\overline{f}$.

г. Укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных букв минимальной ДНФ функции $\overline{f}$.

2. Постройте инверсную структуру по рисунку 7.27. Найдите:

1) число знаков дизъюнкции, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов минимальной ДНФ функции f;

2) число знаков дизъюнкции, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов минимальной КНФ функции f;

3) число знаков дизъюнкции, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов минимальной ДНФ функции $\overline{f}$;

4) десятичные эквиваленты двоичных наборов значений аргументов, на которых инверсная структура находится в проводящем состоянии.

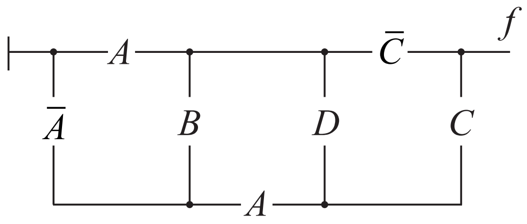


Рис. 7.27

. . . .

8 Комбинационные схемы

8.1 Электронная интерпретация булевых формул

В комбинационных схемах двоичные переменные и логические операции интерпретируются иначе по сравнению с контактными элементами:

1) двоичным переменным A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$, где n – число переменных) ставятся в соответствие электронные запоминающие элементы – триггеры с парафазными выходами: один из выходов прямой (неинверсный) – A_i, другой инверсный – $\overline{A_i}$;
2) на входах и выходах логических элементов может быть один из двух уровней напряжения: низкий (обычно равный нулю) и высокий (не равный нулю, например, 5 В);
3) единичному значению всех логических переменных соответствует высокий уровень напряжения, нулевому – напряжение, равное нулю;
4) логической операции конъюнкции соответствует электронный элемент, называемый схемой (элементом) И. Выходное напряжение схемы И равно высокому уровню только в том случае, если высокие уровни поданы на все его входы. Следовательно, выходное напряжение элемента И равно нулю при подаче низкого уровня хотя бы на один из его входов;
5) булевой операции дизъюнкции соответствует логический элемент ИЛИ. Выходное напряжение элемента ИЛИ равно низкому уровню только в том случае, если низкий уровень подан на все его входы. Следовательно, чтобы получить высокий уровень на выходе схемы ИЛИ, достаточно подать высокий уровень хотя бы на один из её входов;
6) операции инверсии соответствует одновходовой элемент НЕ (инвертор). Если на его вход подать низкий уровень напряжения, то на выходе окажется высокий уровень. Если на вход подать высокий уровень, то выходное напряжение будет равным нулю;
7) в соответствии с операцией суперпозиции выходы одних элементов можно подключать ко входам других элементов.

Согласно данной интерпретации каждой булевой функции, представленной в форме любого порядка, соответствует вполне определенная комбинационная схема в виде сети элементов И, ИЛИ, НЕ, и всякой комбинационной схеме, заданной в виде сети логических элементов И, ИЛИ, НЕ, соответствует вполне определенная булева функция.

Систему с приведённой интерпретацией можно назвать формализованным языком для описания комбинационных логических схем.

Элементы И, ИЛИ, НЕ, являются основными. Они входят составной частью во все другие логические элементы, в также в схемы запоминающих элементов – триггеров. В связи с этим, чтобы получить представление о том, из каких радиотехнических деталей состоят комбинационные схемы, вполне достаточно рассмотреть электрические схемы только трёх основных элементов И, ИЛИ, НЕ, причём можно ограничиться лишь их простейшей диодно-резисторной и транзисторной реализацией.

8.2 Электрическая схема элемента И

Диодно-резисторная принципиальная электрическая схема элемента И приведена на рисунке 8.1. Схема изображена с двумя входами A и B. Это наименьшее число входов элемента И, т. е. одновходовых элементов И не существует. Схема И имеет один выход f.

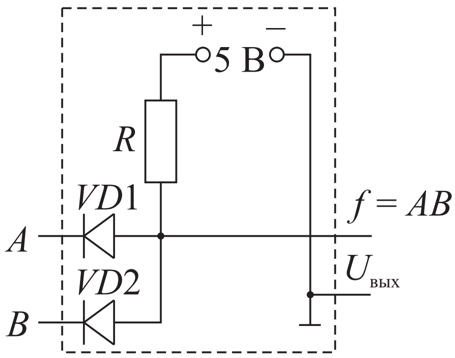


Рис. 8.1

Подадим на вход A низкий уровень. Диод $VD1$ откроется. Тогда выходное напряжение $U_{вых}$, измеряемое относительно знака «минус» источника питания, окажется равным падению напряжения на открытом (т. е. проводящем) диоде $VD1$. Напряжение это мало́, в реальности оно составляет доли вольта, а если учесть идеализацию, то можно считать, что $U_{вых} = 0$ В. Если подать низкий уровень на вход B, то и в этом случае выходное напряжение $U_{вых}$ независимо от состояния входа A примет нулевое значение. Если же на оба входа подать 5 В, то диоды $VD1$ и $VD2$ подключатся катодами к положительной клемме источника питания и выходное напряжение примет значение высокого уровня, равного напряжению источника питания 5 В.

Таким образом, выходное напряжение $U_{вых}$ равно нулю, если:

$$A = 0 \text{ В}, B = 0 \text{ В}; \quad A = 0 \text{ В}, B = 5 \text{ В}; \quad A = 5 \text{ В}, B = 0 \text{ В},$$

и только при высоких уровнях на обоих входах $U_{вых} = 5$ В.

В соответствии с принятой интерпретацией элемент И реализует операцию конъюнкции, так как согласно рисунку 8.1 $f = 1$ только при $A = B = 1$, а во всех остальных трёх случаях $f = 0$.

На рисунке 8.1 изображена двухвходовая схема И. В общем же случае на число входов ограничений нет. Например, на рисунке 8.2 изображён элемент И с четырьмя входами. Для увеличения числа входов достаточно подключить к выходу f дополнительные диоды в соответствующем количестве, ориентируя их анодами к точке f. Если какой-либо вход элемента И не используется, то это эквивалентно подаче на него единичного уровня.

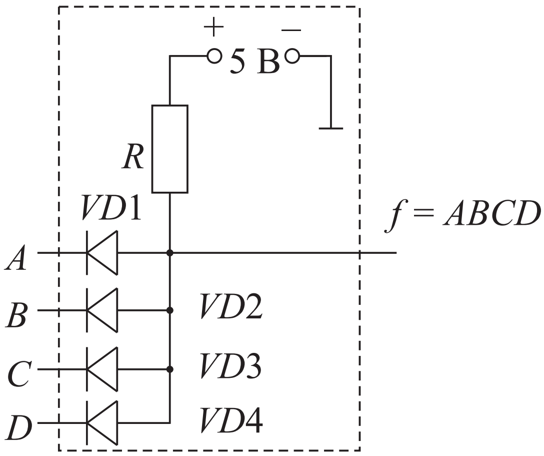


Рис. 8.2

Условное обозначение элемента И приведено на рисунке 8.3.

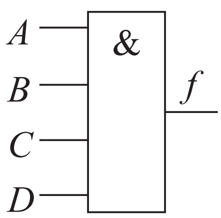
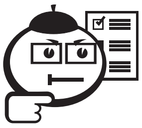


Рис. 8.3



Упражнения

1. На рисунке 8.1 падение напряжения на резисторе R равно 5 В. Найдите $U_{\text{вых}}$.

2. На рисунке 8.1 $A = 1$, $B = 0$. Сколько вольт на резисторе R?

3. На рисунке 8.1 $A = 0$, $B = 1$. Сколько вольт между точками A и B?

8.3 Электрическая схема элемента ИЛИ

Электрическая схема двухвходового логического элемента ИЛИ приведена на рисунке 8.4 (одновходовых элементов ИЛИ, как и элементов И, не существует).

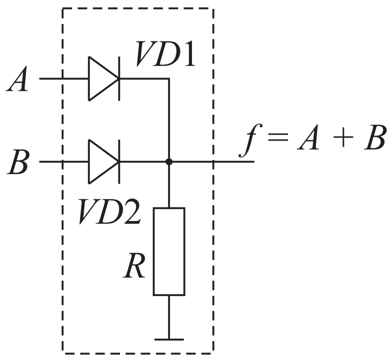


Рис. 8.4

Прежде всего, обратим внимание на то, что в схеме ИЛИ нет источника питания. Электроэнергия подаётся на схему по её входам от других элементов.

Сначала предположим, что $A = B = 0$. В этом случае выходное напряжение равно нулю. Подадим на вход A высокий уровень напряжения, равный 5 В. Откроется диод $VD1$. Так как падение напряжения на проводящем диоде равно нулю, то потенциалы точек A и f одинаковы и равны 5 В независимо от того, какое напряжение подано на вход B. То же самое относится и ко входу B. Таким образом, напряжение на выходе схемы ИЛИ становится равным 5 В, если:

$$A = 0\text{ В}, B = 5\text{ В};\quad A = 5\text{ В}, B = 0\text{ В};\quad A = 5\text{ В}, B = 5\text{ В},$$

и равно нулю при $A = 0$ В, $B = 0$ В. Отсюда видно, что элемент ИЛИ реализует операцию дизъюнкции.

Как и в случае элемента И, схема ИЛИ может быть многовходовой. Например, на рисунке 8.5 изображена схема ИЛИ с четырьмя входами. При необходимости увеличить число входов можно подключить к выходному выводу f соответствующее количество диодов, ориентируя их катодами к выходу. Если какой-либо вход элемента ИЛИ не используется, то это эквивалентно подаче на него низкого уровня напряжения.

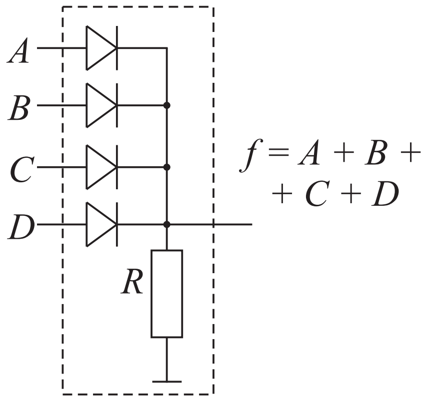


Рис. 8.5

Условное изображение схемы ИЛИ приведено на рисунке 8.6.

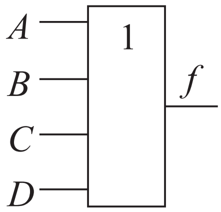
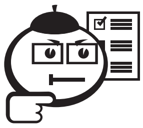


Рис. 8.6



Упражнения

1. На рисунке 8.4 напряжение между точками A и B равно 5 В. Найдите падение напряжения на резисторе R.

2. На рисунке 8.4 диод $VD2$ находится в проводящем состоянии. Найдите падение напряжения на резисторе R.

3. На рисунке 8.4 напряжение между точками A и f равно 0 В. Найдите напряжение между точками B и f, если $B = 1$.

8.4 Электрическая схема элемента НЕ (инвертора)

Принципиальная схема инвертора приведена на рисунке 8.7. Его основу составляет транзистор типа *n-p-n*. Инвертор имеет один вход и один выход. Если на вход подать низкий уровень напряжения, т. е. равный 0 В, то транзистор окажется запертым (так как базовый ток отсутствует). При этом выходное напряжение равно 5 В.

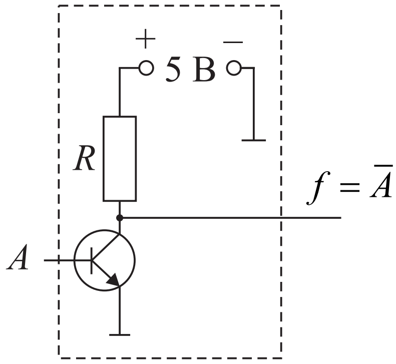


Рис. 8.7

Если на вход подать 5 В (через токоограничивающий резистор), то транзистор откроется и выходное напряжение будет равно падению напряжения на открытом транзисторе. Как и в случае диода, это напряжение невелико (доли вольта). Идеализируя, можно считать, что оно равно нулю. Таким образом, инвертор реализует операцию отрицания (инверсии).

Условное обозначение элемента НЕ приведено на рисунке 8.8.

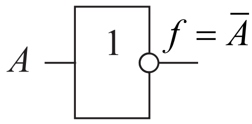


Рис. 8.8

На рисунке 8.9 приведена схема типа И-НЕ, известная под названием *элемента Шеффера.* Она представляет собой элемент И, к выходу которого подключен инвертор. Элемент Шеффера, как и схема И, может быть многовходовым. Например, на рисунке 8.9 он изображён с тремя входами.

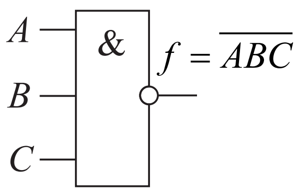
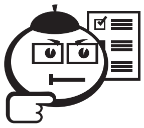


Рис. 8.9

Если на рисунке 8.9 вместо элемента И поставить схему ИЛИ, то получим элемент ИЛИ-НЕ, известный под названием *элемента Пирса*.



Упражнения

1. На рисунке 8.7 на вход подан низкий уровень напряжения. Сколько вольт между эмиттером и коллектором транзистора?

2. На рисунке 8.7 падение напряжения на резисторе R равно нулю. Сколько вольт между эмиттером и коллектором транзистора?

3. На рисунке 8.7 напряжение между точками A и f равно 5 В. Найдите падение напряжения на резисторе R, если $A = 0$.

8.5 Триггер типа *RS*

Изобретение *бистабильного* триггера (т. е. схемы с двумя устойчивыми состояниями), составившего основу быстродействующей памяти средств автоматики и вычислительной техники, является одним из самых ярких и великих достижений человечества. Изобрёл триггер в 1918 г. русский радиотехник, основоположник радиоламповой промышленности СССР Михаил Александрович Бонч-Бруевич (1888–1940).

С тех пор специалистами было предложено много различных схем высокого быстродействия для хранения информации в технических устройствах. Среди них такие запоминающие элементы, как ферритовые кольца, трансфлюксоры, параметроны, криотроны и др. [13].

В настоящее время широчайшее распространение получили статические триггеры. Простейшим из них является триггер типа RS. Он состоит из двух последовательно соединённых элементов Шеффера, причем выход второго элемента соединён со входом первого. Схема RS-триггера приведена на рисунке 8.10, условное обозначение – на рисунке 8.11.

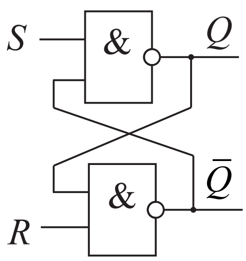


Рис. 8.10

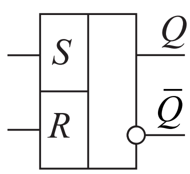


Рис. 8.11

Триггер RS имеет парафазные выходы. Один из них называется *прямым*. Обозначается он буквой без инверсии. Второй выход называется *инверсным*.

Обозначается буквой со знаком отрицания. На рисунке 8.10 прямой выход обозначен буквой Q, инверсный – буквой $\overline{Q}$. В соответствии с вышепринятой интерпретацией будем считать, что триггер находится в нулевом состоянии, если на его прямом выходе имеется низкий уровень напряжения (тогда на инверсном – высокий). Записывается это следующим образом: $Q = 0$. Триггер находится в единичном состоянии, если на его прямом выходе поддерживается высокий уровень (а на инверсном – низкий). Записывается: $Q = 1$.

RS-триггер имеет два установочных входа: S – единичный, R – нулевой. Исходное состояние входов: $R = S = 1$. Это режим хранения информации (объём информации, хранимой одним триггером, – 1 бит). Если принять: $R = 1$, $S = 0$, то триггер установится в единичное состояние. Если принять $R = 0$, $S = 1$, то триггер перейдёт в нулевое состояние.

При $R = S = 0$ на обоих выходах будут высокие уровни напряжения. В общем случае это состояние является запрещённым.

На рисунке 8.12 приведена схема *RS*-триггера, синхронизируемого по входу С. Если на рисунке 8.10 триггер переходит, например, из нулевого в единичное состояние тотчас после подачи низкого уровня на вход S, то на рисунке 8.12 триггер не меняет своего состояния при любых изменениях уровней напряжения на входах R и S, если С = 0. Допустим, что $Q = 0$, кроме того, $S = 1$ и $R = 0$. Пока С = 0, триггер находится в нулевом состоянии. Лишь с момента, когда на входе С напряжение переходит с низкого уровня на высокий, триггер меняет своё состояние на единичное. Таким образом, синхронизируемый *RS*-триггер переходит из одного состояния в другое только под действием синхроимпульса. Происходит это в момент, когда напряжение на входе С меняется с низкого уровня на высокий, а на переход синхроимпульса с высокого уровня на низкий триггер не реагирует.

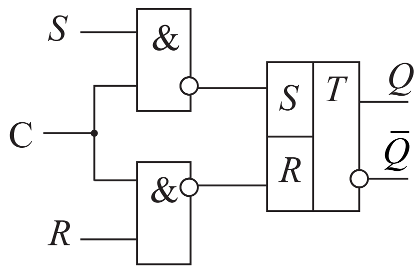


Рис. 8.12

Областью применения *RS*-триггеров является использование их в качестве запоминающих регистров цифровых вычислительных устройств. Согласно вышерассмотренной интерпретации булевых формул триггеры в этих регистрах используются в качестве физических моделей логических переменных булевых функций. Пример регистра приведён на рисунке 8.13. Всего в регистре n триггеров. Каждому триггеру поставлен в соответствие отдельный разряд n-значного двоичного числа. Веса указаны над триггерами. Слева находится старший разряд, справа – младший. Вес старшего разряда равен 2^{n-1}, младшего – $2^0 = 1$. В n-разрядном регистре может храниться одно число из 2^n возможных.

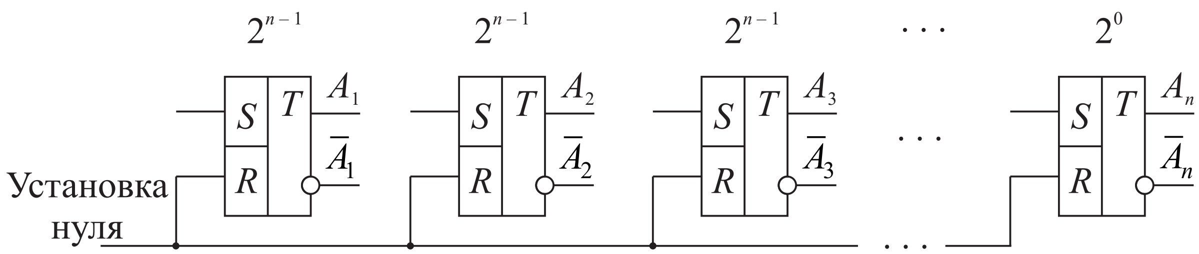


Рис. 8.13

Чтобы регистр перевести в нулевое состояние, на вход «Установка нуля» необходимо на время t подать низкий уровень сигнала. Обычно время t составляет доли микросекунды, но вообще на его продолжительность (в большую сторону) ограничений нет. После этого в регистр можно записать любое n-значное двоичное число подачей низкого уровня напряжения на единичные входы соответствующих триггеров.

8.6 Построение комбинационных схем

Всякой булевой функции соответствует вполне определённая комбинационная схема. При построении комбинационных схем главной является операция суперпозиции, согласно которой, как отмечено в п. 7.1, логические элементы можно соединять последовательно. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8.1

Реализовать в виде комбинационной схемы булеву функцию

$$f = ABC + D.$$

Для её построения необходим один элемент И, описываемый функцией

$$\varphi = ABC,$$

и один двухвходовой элемент ИЛИ, реализующий функцию

$$\psi = Q + D.$$

Если в соответствии с операцией суперпозиции вместо переменной Q выражения ψ подставим функцию φ, то получим заданное выражение f. Физически это соответствует подключению входа Q к выходу элемента φ, как показано на рисунке 8.14. Схему можно представить и в более компактном виде (рис. 8.15).

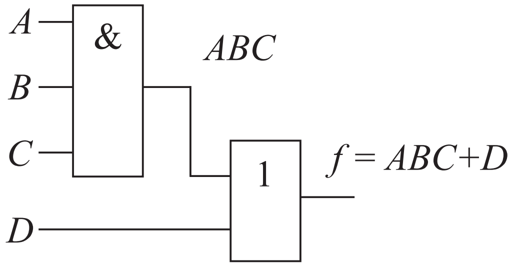


Рис. 8.14

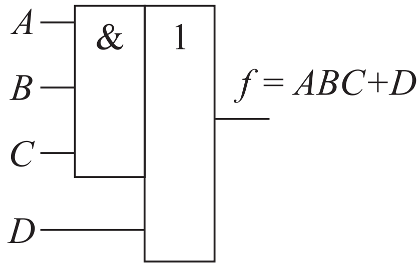


Рис. 8.15

Пример 8.2

Представить в виде комбинационной схемы функцию

$$f = (A + \overline{B} + C)(B + \overline{C})D.$$

Эта функция представлена в КНФ. Для её реализации необходимо два элемента ИЛИ и один элемент И. Схема приведена на рисунке 8.16. На рисунке 8.17 она изображена в компактном виде.

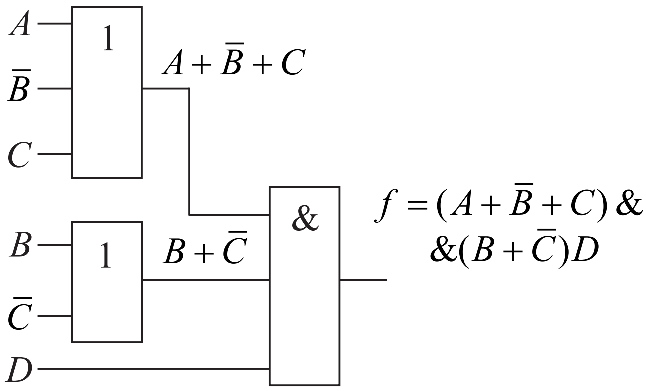


Рис. 8.16

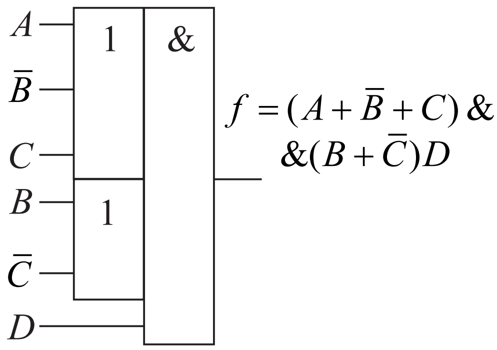


Рис. 8.17

Пример 8.3

В предыдущих двух примерах схемы построены на основе нормальных форм. В данном же примере функция представлена в форме третьего порядка:

$$f = (PQ + R)(A + B).$$

Схема приведена на рисунке 8.18. Строится она по аналогии с предыдущими схемами.

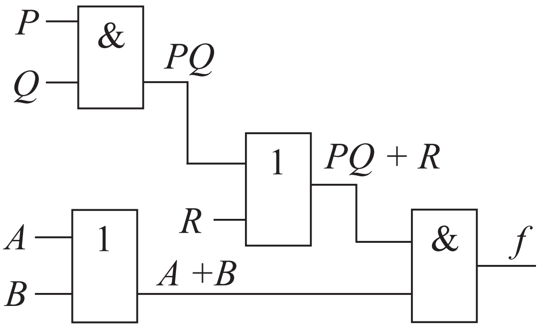


Рис. 8.18

Пример 8.4

Усложним функцию до формы четвёртого порядка:

$$f = (PQ + R)(A + B) + CD.$$

Это выражение отличается от функции из примера 8.3, записанной в форме третьего порядка, только тем, что в неё при помощи операции дизъюнкции включена конъюнкция *CD*. Вследствие этого порядок функции повысился до четвёртого. Соответственно и схема данного примера, изображённая на рисунке 8.19, отличается от рисунка 8.18 лишь одной схемой И, реализующей конъюнкцию *CD*.

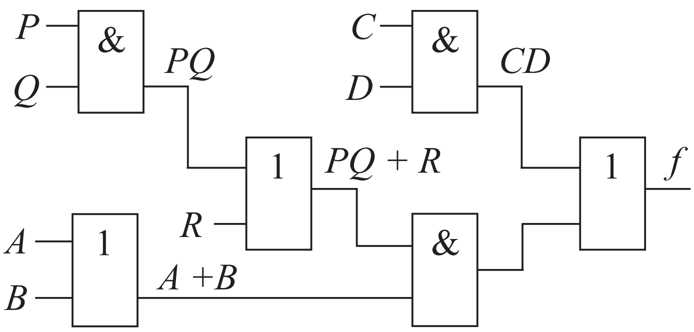


Рис. 8.19

Пример 8.5

Изобразить комбинационную схему согласно функции

$$f = [(A + \overline{B} + CD)(B + \overline{C}) + D](DE + K) + PQ.$$

Это выражение шестого порядка. Схема строится по аналогии с предыдущими примерами (рис. 8.20).

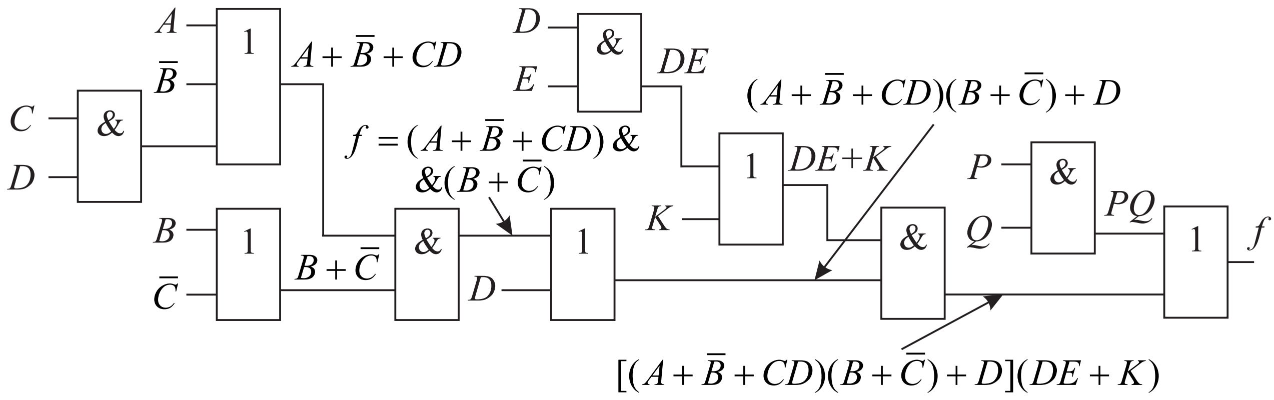
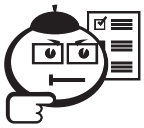


Рис. 8.20



Упражнения

1. Сколько трёхвходовых элементов И и трёхвходовых элементов ИЛИ потребуется для реализации следующих булевых функций?

1) $f_1 = (A + \overline{B} + CDE)(B + \overline{C})$;

2) $f_2 = [(A + \overline{B} + C)(B + \overline{C} + E + F) + PQR + T$;

3) $f_3 = A\overline{B}C + B\overline{C}D + [E(F + P + Q)R + T + S]$.

2. Сколько всего элементов ИЛИ и сколько элементов И содержится в схеме, построенной по минимальной ДНФ функции f_1 предыдущего примера?

8.7 О весовых и невесовых кодах

Пусть дано двоичное число, например 11010. Какое десятичное число ему соответствует? В общем случае однозначно ответить на этот вопрос невозможно. Если двоичный код является невесовым, то необходима таблица, где для каждого кода указано соответствующее десятичное число. Соответствие может быть задано не только таблицей, но и какими-либо формулами или правилами.

В весовых системах таблицы не требуются. Перевод двоичных кодов в десятичную систему осуществляется на основе полинома вида

$$N = a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + \ldots + a_1q_1 + a_0q_0,$$

где коэффициенты $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ изображают цифры; n – длина кода, т. е. число входящих в него знаков 0 или 1. Числа q_{n-1}, q_{n-2}, …, q_1, q_0 обозначают веса. Именно этими весами и обусловлено все многообразие способов двоичного кодирования чисел, представленных в других системах счисления.

Самым распространенным весовым двоичным кодом является код, построенный на двоичной системе счисления с весами, равными степени числа 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots.$$

Например, если $n = 5$, то

$$q_4 = 16, \quad q_3 = 8, \quad q_2 = 4, \quad q_1 = 2, \quad q_0 = 1.$$

Тогда коду 11010 соответствует десятичное число:

$$1{\cdot}16 + 1{\cdot}8 + 0{\cdot}4 + 1{\cdot}2 + 0{\cdot}1 = 26.$$

При других весах тому же коду 11010 может соответствовать другое десятичное число. Например, если

$$q_4 = 12, \quad q_3 = 3, \quad q_2 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_0 = 5.$$

то двоичному коду 11010 соответствует число 16, так как

$$1{\cdot}12 + 1{\cdot}3 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}1 + 0{\cdot}5 = 16.$$

Весовой код задают обычно упорядоченной последовательностью весов. Например, если

$$q_4 = 4, \quad q_3 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_0 = 4,$$

то можно записать только веса: 41114, откуда видно, что код пятизначный и что веса левого и правого разрядов равны 4, а остальные равны 1. Этого вполне достаточно, чтобы по коду найти его десятичный эквивалент. Например, двоичному коду 11010 в системе 41114 соответствует десятичное число 6:

$$1{\cdot}4 + 1{\cdot}1 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}1 + 0{\cdot}4 = 6.$$

Таким образом, чтобы по записи весового двоичного кода найти его десятичный эквивалент, необходимо знать веса двоичных разрядов. На практике обычно считается, что если веса не указаны, то они представляют собой степени числа 2. Примером может служить код 8421, где веса равны:

$$8 = 2^3, \quad 4 = 2^2, \quad 2 = 2^1, \quad 1 = 2^0.$$

Во всех же остальных случаях необходимо указывать, в какой системе весов записываются двоичные коды.

Пример 8.6

Пусть задан весовой двоичный код P = 1224. В нём четыре знака. Всего четырёхзначных кодов возможно 16. Но сумма весов в коде 1224 равна 9. Следовательно, закодировать этим кодом можно только 10 каких-либо объектов. Пусть это будут десятичные цифры. Очевидно, что некоторые цифры могут быть закодированы неоднозначно, т. е. различными двоичными кодами:

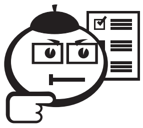
0 – 0000;	3 – 1100, 1010;	6 – 0011, 0101;	
1 – 1000;	4 – 0110, 0001;	7 – 1011, 1101;	
2 – 0100, 0010;	5 – 1110, 1001;	8 – 0111,	9 – 1111.

Пример 8.7

Пусть задан пятизначный двоичный весовой код Q = 11115. Так как сумма весов равна 9, то его также можно использовать для кодирования десятичных цифр. Существует 32 последовательности нулей и единиц по пять знаков каждая. Но для кодирования десятичных цифр используется только 10 из них. Это значит, что избыточность пятизначного кода при кодировании десятичных цифр гораздо больше по сравнению с четырёхзначными кодами. Список десятичных цифр и способов их кодирования в системе 11115 имеет вид:

0 – 00000;
1 – 10000, 01000, 00100, 00010;
2 – 11000, 10100, 10010, 01100, 01010, 00110;
3 – 11100, 11010, 10110, 01110;
4 – 11110;
5 – 00001;
6 – 10001, 01001, 00101, 00011;
7 – 11001, 10101, 10011, 01101, 01011, 00111;
8 – 11101, 11011, 10111, 01111;
9 – 11111.

Согласно этому списку цифры 0, 4, 5 и 9 кодируются однозначно. Цифрам 1, 3, 6 и 8 соответствует по четыре кода. Самыми «урожайными» с позиций избыточности кодов являются цифры 2 и 7. Каждую их них можно закодировать шестью способами.



Упражнения

1. Сколько возможно способов кодирования в системе 112231 цифры 3? 5?

2. Сколько возможно способов кодирования в системе 111141 цифры 4? 6?

3. Какие десятичные цифры невозможно закодировать в системе 1356?

4. Какие десятичные цифры можно закодировать двумя способами в системе двоичных кодов 1356?

8.8 Синтез преобразователя весового двоичного кода

В предыдущем параграфе приведены коды P = 8421 и Q = 11115. На их основе построим комбинационный преобразователь входного кода P в выходной код Q.

Сначала построим таблицу (табл. 8.1). В ней три области: левая, средняя и правая. В средней области, там, где колонки обозначены буквами A, B, C, D (это выходы триггеров), размещены входные коды с весами 8421. Справа в виде пяти колонок, обозначенных символами f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, расположены выходные двоичные коды с весами 11115, обозначающие те же десятичные цифры, что и в области входных кодов. Веса в таблице не указаны, но они подразумеваются. В левой части таблицы приведена колонка, где записаны десятичные эквиваленты входных кодов.

Таблица 8.1

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1	1	1	1	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	1	1	0	1

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
9	1	0	0	1	1	1	1	1	1
10	1	0	1	0	×	×	×	×	×
11	1	0	1	1	×	×	×	×	×
12	1	1	0	0	×	×	×	×	×
13	1	1	0	1	×	×	×	×	×
14	1	1	1	0	×	×	×	×	×
15	1	1	1	1	×	×	×	×	×

В правой части таблицы 8.1 кроме нулей и единиц имеются крестики. Ими обозначены «лишние» входные двоичные коды, которым не соответствует никакой выходной код, так как кодов в системе 11115 существует только 10. «Лишние» коды на вход преобразователя подаваться не будут, следовательно, их можно рассматривать как неопределённые состояния. Таблица 8.1 представляет собой таблицу истинности для пяти булевых функций, найдем их минимальные ДНФ и КНФ.

Минимизируем функцию f_1:

$$f_1 = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9); [10, 11, 12, 13, 14, 15].$$

Карта Вейча приведена на рисунке 8.21 (расположение букв вокруг карты, как в разделе 5). Минимальная ДНФ, согласно этой карте, имеет вид

$$f_1 = A + C + B\overline{D} + \overline{B}D.$$

$f_1 =$

×	×	1	1
×	×	1	
1	×	1	1
1	×	1	

Рис. 8.21

Находим минимальную КНФ. По карте Вейча (рис. 8.22) минимизируем функцию $\overline{f_1}$:

$$\bar{f_1} = B\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Инвертируем это выражение по теореме де Моргана и получаем искомую КНФ:

$$f_1 = (\overline{B} + C + \overline{D})(A + B + C + D).$$

$\overline{f}_1 =$

×	×		
×	×		1
	×		
	×		1

Рис. 8.22

Остальные функции в СДНФ имеют вид (неопределённые состояния остаются теми же).

$$f_2 = (2, 3, 4, 7, 8, 9);$$
$$f_3 = (3, 4, 8, 9);$$
$$f_4 = (4, 9);$$
$$f_5 = (5, 6, 7, 8, 9).$$

Полный список минимальных ДНФ и КНФ имеет вид:

$$f_1 = A + C + B\overline{D} + \overline{B}D; \qquad f_1 = (A + C + \overline{D})(A + B + C);$$
$$f_2 = A + CD + \overline{B}C + B\overline{C}\,\overline{D}; \qquad f_2 = (\overline{B} + \overline{C} + D)(A + C + \overline{D})(A + B + C);$$
$$f_3 = A + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}CD; \qquad f_3 = (\overline{B} + \overline{D})(\overline{C} + D)(A + B + C);$$
$$f_4 = B\overline{C}\,\overline{D} + AD; \qquad f_4 = \overline{C}(A + \overline{D})(B + D);$$
$$f_5 = A + BC + BD; \qquad f_5 = (A + B)(A + C + D).$$

Для построения логической схемы преобразователя выбираем те функции, которые в аналитическом представлении содержат наименьшее число букв. Если ДНФ и КНФ по числу букв одинаковы, то берем ДНФ.

В данном случае во всех КНФ число букв не меньше, чем в ДНФ. Схема преобразователя приведена на рисунке 8.23. Все пять её составляющих построены на основе минимальных дизъюнктивных нормальных форм булевых функций.

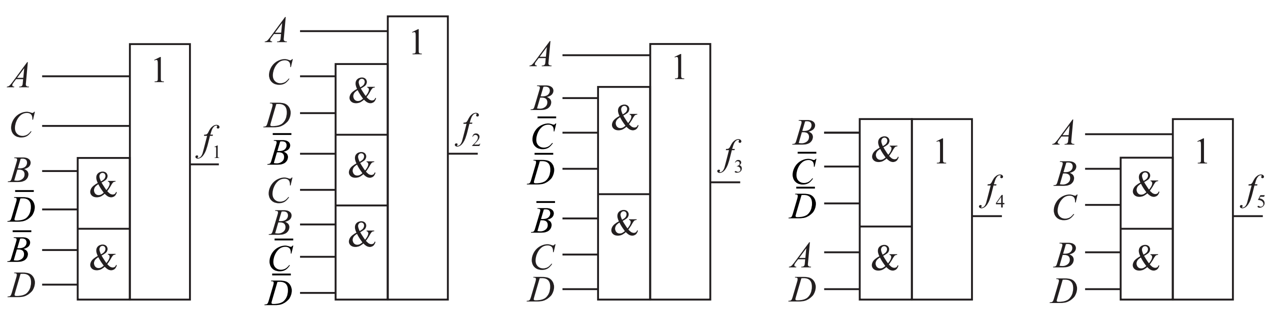


Рис. 8.23

8.9 О путях дальнейшего упрощения комбинационных схем

Информации, представленной в данной главе, вполне достаточно для того, чтобы разработать практически любую электронную комбинационную структуру, работа которой представима в виде таблицы истинности. Все такие структуры можно рассматривать как преобразователи n-значных двоичных кодов в m-значные.

Наиболее простым является случай, когда $m = 1$, т. е. схема содержит только один выход. Её синтез сводится к минимизации булевой функции в ДНФ и КНФ. При возможности следует уменьшить число букв повышением порядка формул, если это допускается по условиям быстродействия схемы.

Если $m > 1$, то выход преобразователя представляет собой систему булевых функций. В этих случаях продолжить упрощение схемы можно за счёт выявления одинаковых составляющих, входящих в несколько функций. Эти одинаковые составляющие в схеме реализуются один раз, а используются многократно. Например, конъюнкция $B\overline{C}\,\overline{D}$ входит одновременно в формулы f_2, f_3 и f_4 п. 8.8. Следовательно, два трёхвходовых элемента И из схемы (рис. 8.23) можно удалить.

9 Функциональная полнота системы булевых функций

9.1 Вводные замечания

На заре развития цифровой техники электронные схемы строили из логических элементов, используя для них диоды, транзисторы, резисторы. Со временем появились идеи представления логических элементов в виде неразборных блоков (модулей, позже – микросхем), реализующих некоторые булевы функции. И тут стали возникать вопросы: какие следует выбирать функции для реализации их в неразборном представлении? Каков минимальный набор блоков? Может быть достаточно одной микросхемы, позволяющей строить любые логические схемы и запоминающие элементы – триггеры, и как убедиться в его универсальности? Всякая ли булева функция с применением операции суперпозиции может быть реализована из микросхемных блоков? На все подобные вопросы ответы даёт теорема Поста о функциональной полноте (в литературе её иногда называют теоремой Поста – Яблонского, например в [14]).

Основу понятия функциональной полноты составляют пять классов булевых функций: монотонные, линейные, самодвойственные, сохраняющие нуль и сохраняющие единицу. Им посвящён данный раздел, где рассмотрены не только эти классы, но и приведена теорема Поста, являющаяся завершением темы синтеза комбинационных и многотактных схем дискретного действия.

9.2 Монотонные функции

Булева функция n аргументов называется *монотонной*, если при любом возрастании сравнимых наборов функция не убывает. В сравнимых наборах a и b выполняется неравенство: $a_i \geq b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; i – номер разряда двоичного набора). На несравнимых наборах монотонная функция может убывать или оставаться неизменной. Например, функция $f = AB + C$ на несравнимых наборах 001 и 010 убывает, а на наборах 101 и 110 не изменяется. На сравнимых наборах 100 и 111 возрастает и не изменяется на наборах 001 и 101.

Всякая монотонная функция имеет единственную минимальную ДНФ и единственную минимальную КНФ, причем обе формы не содержат инверсных аргументов. Например, в результате минимизации функции

$$f = (3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

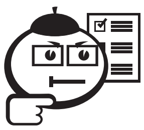
получаем минимальные ДНФ и КНФ без инверсий:

$$f = AB + AC + BD + CD; \quad f = (A + D)(B + C),$$

следовательно, эта функция является монотонной.

Верно и обратное утверждение: если в аналитической записи функции отсутствуют инверсные аргументы, то функция является монотонной. Эти свойства можно использовать в качестве критерия при исследовании функций на монотонность.

Монотонные функции образуют функционально замкнутый класс, т. е. в результате суперпозиции монотонных функций всегда будут получаться только монотонные функции.



Упражнения

1. Укажите номера функций, являющихся монотонными:

1) $f = 0$; 2) $f = A+B$; 3) $f = \overline{A} + A$; 4) $f = AB$; 5) $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

2. Какие функции являются монотонными? Укажите их номера:

1) $f = \overline{\overline{A}\,\overline{C}}$; 2) $f = A \oplus B$; 3) $f = 1 \oplus AB$; 4) $f = ABC$; 5) $f = \overline{\overline{A} + \overline{C}}$.

3. Какие функции являются немонотонными? Укажите их номера:

1) $f = \overline{A}B + 1$; 2) $f = 1 \cdot 0 \cdot A + B$; 3) $f = 1 \oplus \overline{\overline{A}C}$; 4) $f = \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{C}}}$; 5) $f = \overline{\overline{\overline{A}} + \overline{C}}$.

9.3 Линейные функции

Функция называется *линейной*, если в алгебре Жегалкина она представима в виде полинома первой степени (без конъюнкций). Например, функции

$$f_1 = A \oplus B, \quad f_2 = A \oplus B \oplus C \oplus 1, \quad f_3 = B \oplus 1, \quad f_4 = 1, \quad f_5 = 0$$

не содержат конъюнкций, следовательно, являются линейными. Функция

$$f = AC \oplus B$$

содержит конъюнкцию, поэтому к классу линейных не относится.

Пример 9.1

Является ли линейной функция

$$f(A, B, C, D) = A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + C + D?$$

Находим полином Жегалкина. Для этого функцию представим в виде дизъюнкции непересекающихся конъюнкций (напомним, что две конъюнкции не пересекаются, если их произведение равно нулю). Преобразования можно выполнить с применением формул (6.8)–(6.12), но проще применить карту Вейча (рис. 9.1). Минтермы на этой карте сгруппированы так, что образуют непересекающиеся конъюнкции. Так как конъюнкции не пересекаются, то их соединяем знаками суммы по модулю 2:

$$f(A,B,C,D) = C \oplus \overline{C}D \oplus A B \overline{C}\,\overline{D}.$$

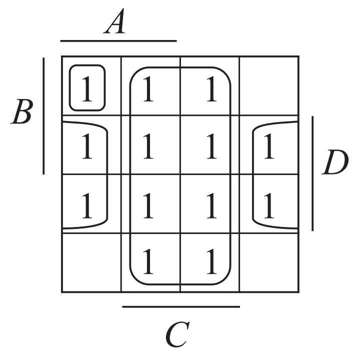


Рис. 9.1

Устраняем знаки инверсии согласно формуле (6.12):

$$f(A,B,C,D) = C \oplus (C \oplus 1)D \oplus A B (C \oplus 1)(D \oplus 1).$$

Раскрываем скобки:

$$f(A,B,C,D) = C \oplus CD \oplus D \oplus A B \oplus ABC \oplus ABD \oplus ABCD.$$

Полином Жегалкина содержит конъюнкции, следовательно, заданная функция является нелинейной.

. . . .

Пример 9.2

Определить, является ли линейной функция

$$f = (1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15).$$

Действуем по аналогии с предыдущим случаем. По карте Вейча находим:

$$f(A,B,C,D) = A\overline{C}\,\overline{D} \oplus \overline{A}C\overline{D} \oplus ACD \oplus \overline{A}\,\overline{C}D.$$

Освобождаемся от знаков инверсии и находим полином Жегалкина:

$$f(A,B,C,D) = A(C \oplus 1)(D \oplus 1) \oplus (A \oplus 1)C(D \oplus 1) \oplus ACD \oplus (A \oplus 1)(C \oplus 1)D =$$

$$= A \oplus AC \oplus AD \oplus ACD \oplus C \oplus AC \oplus CD \oplus ACD \oplus$$

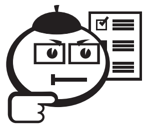
$$\oplus ACD \oplus D \oplus AD \oplus CD \oplus ACD = A \oplus C \oplus D.$$

Получилось выражение Жегалкина, в котором нет конъюнкций, следовательно, заданная функция является линейной.

Линейные функции образуют функционально замкнутый класс, т. е. суперпозиция линейных функций всегда есть только линейная функция.

. . . .

. . . .



Упражнения

1. Укажите номера функций, являющихся линейными:

1) $f = 0$; 2) $f = A+B$; 3) $f = 1+A$; 4) $f = AB$; 5) $f = 1+0\cdot BC$.

2. Какие функции являются линейными? Укажите их номера.

1) $f = 0\cdot AB+C$; 2) $f = A\oplus B$; 3) $f = 1\oplus AB$; 4) $f = AB$; 5) $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

3. Какие функции являются нелинейными? Укажите их номера.

1) $f = AB+1$; 2) $f = 1\cdot 0\cdot A+B$; 3) $f = 1\oplus \overline{A}C$; 4) $f = \overline{\overline{A}\,\overline{C}}$; 5) $f = \overline{\overline{A} + \overline{C}}$.

. . . .

9.4 Самодвойственные функции

Булева функция называется *самодвойственной*, если

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \overline{f}(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n).$$

Согласно этому определению самодвойственная функция на противоположных наборах принимает противоположные значения. Два n-значных набора называются противоположными (взаимно инверсными), если их арифметическая сумма в десятичном представлении есть число $2^n - 1$. Чтобы по заданному набору найти ему противоположный, достаточно в нём нули заменить единицами, а единицы – нулями. Например, если 01100 – заданный набор, то противоположный ему – 10011.

Очевидно, что исследовать на самодвойственность необходимо только такие функции, в которых число минтермов равно 2^{n-1}, т. е. на половине наборов значений аргументов функция равна единице, и на половине – нулевое, так как только среди них содержатся самодвойственные функции. Если число минтермов не равно 2^{n-1}, то функция является несамодвойственной.

Пример 9.3

Определить, является ли самодвойственной функция

$$f(A,B,C,D) = (4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

Данная функция зависит от четырёх переменных и содержит девять минтермов. Это признак несамодвойственности, так как если бы она была самодвойственной, то число её минтермов равнялось бы восьми. Таким образом, заданная функция в класс самодвойственных функций не входит.

Пример 9.4

Выяснить, является ли самодвойственной функция вида

$$f(A,B,C,D) = ABD + A\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D.$$

Представим её в СДНФ, например при помощи карты Вейча:

$$f(A,B,C,D) = (1, 2, 3, 6, 8, 10, 13, 15).$$

Функция содержит восемь минтермов, т. е. равна единице точно на половине наборов значений аргументов. Чтобы определить, является ли она самодвойственной, все возможные минтермы четырёх переменных запишем в два ряда: в первом из них номера возрастают слева направо до номера 7, а во втором убывают. Минтермы, входящие в заданную функцию, подчеркнём:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & 4 & 5 & \underline{6} & 7 \\ \underline{15} & 14 & 13 & 12 & \underline{11} & \underline{10} & 9 & \underline{8} \end{array}$$

При таком расположении минтермов наборы в колонках, представленные десятичными числами, являются противоположными. В каждой колонке находится точно один подчёркнутый минтерм. Это говорит о том, что функция на противоположных наборах принимает противоположные значения. Следовательно, рассмотренная функция является самодвойственной.

Пример 9.5

Определить, является ли самодвойственной функция вида

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}BD + AB\overline{D} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D.$$

Её СДНФ имеет вид:

$$f(A,B,C,D) = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 12, 14).$$

Данная функция, как и в предыдущем примере, содержит также восемь минтермов. Проверим её на самодвойственность:

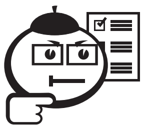
$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & 4 & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\ 15 & \underline{14} & 13 & \underline{12} & 11 & 10 & 9 & 8 \end{array}$$

Из этой записи видно, что имеются противоположные наборы, на которых функция не меняется: 0 и 15 (оба минтерма не подчёркнуты), 1 и 14 (оба подчёркнуты) и др. Следовательно, функция является несамодвойственной.

Класс самодвойственных функций функционально замкнут. Это значит, в результате применения операции суперпозиции к самодвойственным функциям всегда будут получаться только самодвойственные функции.

. . . .

. . . .



Упражнения

1. Укажите номера самодвойственных функций.

1) $f = \overline{A}$; 2) $f = 1 \cdot A + B$; 3) $f = \overline{A + C}$; 4) $f = ABC + D$; 5) $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$.

2. Укажите номера несамодвойственных функций.

1) $f(A,B,C) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)$;

2) $f(A,B,C) = (0, 1, 2, 4, 6)$;

3) $f(A,B,C,D) = (0, 1, 2, 5, 8, 9, 11, 12)$;

4) $f(A,B,C) = (0, 1, 2, 5)$;

5) $f(A,B,C,D) = (0, 1, 7, 8, 10, 11, 12, 13)$;

6) $f(A,B,C) = (0, 1, 4, 6)$.

. . . .

9.5 Функции, сохраняющие единицу

Булева функция *сохраняет единицу*, если на единичном наборе значений аргументов она принимает единичное значение. Например:

$$f = AB\overline{C} + BCD + \overline{A}\,\overline{C}D.$$

Эта функция сохраняет единицу, так как на наборе 1111 она равна единице. Функция

$$f = \overline{A}BC + BC\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D}$$

не сохраняет единицу, так как она равна нулю при $A = B = C = D = 1$.

Пусть функция представлена в СДНФ. Она сохраняет единицу, если в неё входит минтерм с максимальным номером. Например:

$$f(A,B,C) = (1, 2, 3, 5, 6, 7).$$

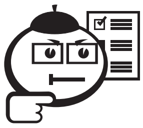
Для трёх переменных максимальный номер равен 7. Минтерм с этим номером входит в функцию, следовательно, она сохраняет единицу.

Функция, представленная в КНФ, сохраняет единицу, если в каждом скобочном выражении, где записаны дизъюнкции, находится хотя бы одна неинверсная переменная. Например:

$$f = (\overline{A} + B + C)(\overline{B} + C + \overline{D})(A + \overline{C} + \overline{D})E.$$

В данной КНФ четыре скобочных выражения (отдельную букву E можно рассматривать как частный случай скобочной дизъюнкции, содержащей только одну букву). В каждом из них содержится неинверсная переменная. При замене их единицами все скобочные дизъюнкции будут равны единице, вследствие чего функция примет единичное значение. Это признак того, что функция сохраняет единицу.

Функции, сохраняющие единицу, образуют функционально замкнутый класс, т. е. если в этом классе применять операцию суперпозиции, то всегда будут получаться только функции, сохраняющие единицу.



Упражнения

1. Укажите номера функций, сохраняющих единицу.

1) $f = \overline{A} + CD$; 3) $f = \overline{\overline{A} + \overline{C} + BD}$; 5) $f = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$;

2) $f = (A + B)(C + D)$; 4) $f = \overline{A}BC + \overline{D}$; 6) $f = \overline{\overline{A}BC + \overline{D}} + \overline{E}$.

2. Укажите номера функций, не сохраняющих единицу.

1) $f(A,B,C) = (0, 2, 4, 6, 7)$;

2) $f(A,B,C) = (0, 1, 2, 4, 6)$;

3) $f(A,B,C,D) = (0, 1, 2, 5, 8, 9, 11, 15)$;

4) $f(A,B,C) = (0, 1, 5)$;

5) $f(A,B,C,D) = (0, 1, 7, 8, 11, 12, 13, 15)$;

6) $f(A,B,C) = (0, 2, 5, 6)$.

9.6 Функции, сохраняющие нуль

Булева функция *сохраняет нуль*, если на *нулевом наборе* она принимает нулевое значение. Например, функция

$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}CD$$

сохраняет нуль, так как она равна нулю на наборе 0000. Функция

$$f = AB + \overline{A}\overline{C} + A\overline{C}D$$

не сохраняет нуль, поскольку на нулевом наборе она равна единице.

По виду булевой функции легко определить, сохраняет ли она нуль:

а) функция, представленная в ДНФ, сохраняет нуль, если в каждой её конъюнкции содержится хотя бы одна неинверсная переменная. Если же в записи функции хотя бы одна конъюнкция состоит только из инверсных букв, то эта функция нуль не сохраняет;

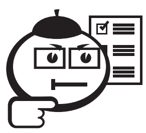
б) функция, представленная в КНФ, сохраняет нуль, если в неё входит не менее одной дизъюнкции, где нет инверсных переменных. Например, функция

$$f = (A + B)(\overline{A} + \overline{C} + D)(B + \overline{C} + D)$$

содержит дизъюнкцию $A + B$ с неинверсными переменными. На наборе 0000 она равна нулю, следовательно, функция сохраняет нуль;

в) функция, заданная в СДНФ, не сохраняет нуль, если она содержит нулевой минтерм m_0. Если же в ней нет минтерма m_0, то функция нуль сохраняет.

Функции, сохраняющие нуль, образуют функционально замкнутый класс, т. е. в результате применения операции суперпозиции к функциям, сохраняющим нуль, всегда будут получаться только сохраняющие нуль функции.



Упражнения

1. Укажите номера функций, сохраняющих нуль.

1) $f = \overline{\overline{A} + CD}$; 3) $f = \overline{\overline{\overline{A} + \overline{C} + BD}}$; 5) $f = A\overline{B} + \overline{A}B$;

2) $f = A + B(C + D)$; 4) $f = ABC + \overline{D}$; 6) $f = \overline{\overline{A}BC + \overline{D}} + \overline{\overline{E}}$.

2. Укажите номера функций, не сохраняющих нуль:

1) $f(A, B, C) = (0, 2, 4, 6, 7)$;

2) $f(A, B, C) = (1, 2, 4, 6)$;

3) $f(A, B, C, D) = (0, 1, 2, 5, 8, 9, 11, 15)$;

4) $f(A, B, C) = (0, 1, 5)$;

5) $f(A, B, C, D) = (1, 7, 8, 11, 12, 13, 15)$;

6) $f(A, B, C) = (0, 2, 5, 6)$.

9.7 Теорема Поста о функциональной полноте

Формулировка теоремы Поста: система булевых функций называется функционально полной, если она содержит хотя бы одну функцию:

1) не сохраняющую константу 1;
2) не сохраняющую константу 0;
3) несамодвойственную;
4) нелинейную;
5) немонотонную.

Доказательство теоремы приведено в [51, с. 152].

На первый взгляд может показаться, что функционально полная система должна содержать не менее пяти функций. На самом деле это не так. Существуют функции, обладающие одновременно несколькими свойствами из перечисленных в теореме Поста. Например, функция

$$f = AB + CD$$

одновременно является нелинейной и несамодвойственной. Функция

$$f = AB + AC + BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

несамодвойственна, нелинейна, немонотонна, не сохраняет нуль. А функция Шеффера вида

$$f = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

одна образует функционально полную систему, так как она является несамодвойственной, нелинейной, немонотонной, не сохраняющей нуль и не сохраняющей единицу.

Пример 9.6

Некто предлагает выпускать в массовых масштабах два типа микросхем, реализующих булевы функции

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + B\overline{C}\,\overline{D};$$

$$f_2 = AB\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{D} + BC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D},$$

обосновывая своё предложение тем, что, соединяя элементы последовательно, можно реализовать любую булеву функцию. Выяснить, достаточно ли обоснованно это предложение.

Определим, к каким замечательным классам относятся функции f_1 и f_2:

1) обе они не сохраняют константу единица;
2) обе не сохраняют константу нуль;
3) обе являются самодвойственными;
4) обе нелинейны;
5) обе немонотонны.

Таким образом, система не удовлетворяет требованиям полноты теоремы Поста: в ней нет несамодвойственной функции. Практически это значит, что никакими способами, применяя только эти два элемента, реализовать несамодвойственные функции не удастся.

. . . .

. . . . Пример 9.7 . . . .

Другой разработчик предлагает систему также из двух элементов: один элемент реализует симметрическую функцию, второй – инверсию:

$$f_1 = S_2(A,B,C,D) = AB\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD.$$

$$f_2 = \overline{A}.$$

Требуется выяснить, обладает ли функциональной полнотой эта система логических элементов.

Функция f_1 не сохраняет единицу, сохраняет нуль, несамодвойственна, нелинейна, немонотонна. Функция f_2 не сохраняет единицу, не сохраняет нуль, самодвойственна, линейна, немонотонна. Очевидно, что эти логические элементы образуют функционально полную систему, и если организовать их массовый выпуск (например, в микросхемном исполнении), то инженеры получат возможность строить любые электронные логические схемы, используя только эти два элемента.

. . . .

Завершим тему следующим замечанием. Функционально полные наборы могут состоять из очень малого числа различных логических элементов. Например, функционально полным является набор, построенный на основе только одного элемента Шеффера, содержащего всего лишь два входа. Достаточно организовать его массовый выпуск, и появится возможность строить не только комбинационные, но и многотактные автоматы, в которых для реализации памяти используются триггеры, состоящие из тех же элементов Шеффера. Но всё это справедливо только в принципе. Практически же реализация схем на элементах Шеффера во многих случаях является слишком громоздкой. Например, для реализации простейшей булевой функции

$$f = (A + B)(\overline{C} + D)$$

необходимы две схемы ИЛИ и одна схема И. Всего три элемента. Если же применить двухвходовые схемы И-НЕ, то потребуется четыре элемента (при условии, что триггеры имеют парафазные выходы). Это видно из следующего выражения, подготовленного для построения схемы на элементах Шеффера:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\;\overline{C\overline{D}}}}.$$

В связи с этим специалисты по цифровой технике хотя и учитывают положения теории, но ориентируются в основном на потребности практики и создают системы из десятков элементов с многократной избыточностью по функциональной полноте.

10 Автоматы с памятью

10.1 Вводные замечания

Понятию автомата в современной научно-технической литературе даётся различное толкование в зависимости от того, к какой области оно относится: к математике или технике. Примером публикации, где даётся математическое определение понятию «автомат», можно назвать [51]. Её авторы пишут:

«Конечный автомат определяется как совокупность следующих пяти объектов:

1) S – конечное множество состояний;
2) I – конечное множество входных символов;
3) O – конечное множество выходных символов;
4) σ – отображение $S \times I$ в S; эта функция определяет по текущим состоянию и входу следующее состояние и называется *функцией изменения состояний* или *функцией переходов*;
5) δ – отображение $S \times I$ в O; эта функция определяет по текущим состоянию и входу текущее значение выхода и называется *выходной функцией*» [51, с. 207].

В. М. Глушков к этим пяти добавляет шестой объект – начальное состояние [12, с. 36].

Н. И. Кондаков пишет: «*Автомат* (греч. *automatos* – самодействующий) – устройство, самостоятельно выполняющее посредством внутреннего механизма заданную человеком программу, т. е. действующее по программе без непосредственного участия программиста в том или ином определённом процессе (в промышленности, в науке, в сфере обслуживания) получения, преобразования и использования информации, материалов, различных видов энергии» [25, с. 15]. Определение Н. И. Кондакова по объёму охватывает гораздо более широкий класс объектов. Кроме тех, что описаны в [51], под него подходят и такие устройства, как автомат Калашникова (стрелковое оружие), регулятор Уатта [44, с. 1365], отбойный молоток и др. В [51] же изучаются только цифровые устройства, из всего многообразия которых наиболее ярким представителем является цифровая вычислительная машина (компьютер). При этом основное внимание уделяется не собственно устройствам, а их модели в виде конечного автомата [39, с. 77], имеющего один вход, на который извне поступает информация в виде последовательности букв входного алфавита, и один выход, куда выводится переработанная информация в виде последовательностей букв выходного алфавита. Кроме того, так как автомат содержит внутреннюю память, вводится понятие алфавита состояний.

Необходимо отметить, что прикладник всегда имеет дело не с теоретической моделью автомата, а с некоторой технической задачей. Разобравшись с её условием, он может сразу найти решение, не применяя никакой теории, если задача достаточно проста. Но в более сложных случаях ему может помочь теория конечных автоматов. Если автомат содержит внутреннюю память, то его работа состоит в переходе памяти под действием тактовых импульсов из одного состояния в другое с последующим их преобразованием. Это можно представить таблицей переходов и таблицей выходов, где для каждого входного сигнала и состояния памяти указывается, в какое состояние должен перейти автомат и что отправить на выход.

Любой автомат с внутренней памятью – это многотактное устройство, по-разному реагирующее на одни и те же входные сигналы, в отличие от комбинационной схемы, не содержащей внутренней памяти, вследствие чего её можно назвать однотактным автоматом. В [58] об этом говорится следующим образом: «Многотактные устройства (последовательностные устройства, конечные автоматы) отличаются от комбинационных тем, что значение их выходной величины зависит не только от комбинации значений входных переменных, но и состояния устройства к моменту приложения входных воздействий. Иначе говоря, подобные устройства обладают памятью».

В данной главе рассматриваются универсальные триггеры типов *T*, *JK*, *D* и приводятся примеры синтеза на их основе простейших автоматов с памятью, т. е. многотактных устройств дискретного действия.

10.2 Триггер типа *T*

Триггер типа *T* является одним из наиболее распространенных на практике. Он имеет два установочных входа *R* и *S* (как и в случае *RS*-триггеров), один счетный вход *T* и два выхода – прямой и инверсный.

T-триггер меняет свое состояние на противоположное под действием каждого импульса, поданного на вход *T*. В электронной технике используются самые разнообразные импульсы. Если их представить графически в системе декартовых координат $U - t$, где U – напряжение, t – время, то графики могут быть различной формы – треугольные, прямоугольные, в виде трапеции и т. д.

В теории дискретных автоматов используются в основном прямоугольные импульсы (рис. 10.1).

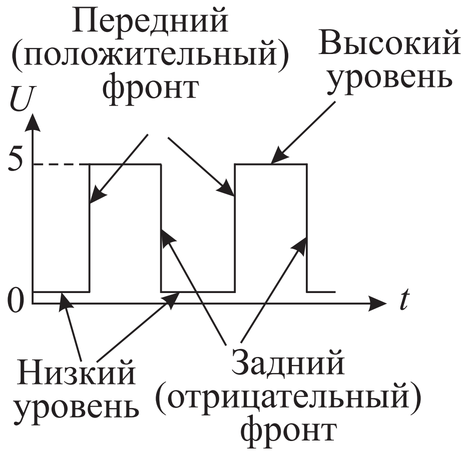


Рис. 10.1

Один из вариантов логической схемы *T*-триггера представлен на рисунке 10.2. Он состоит из двух *RS*-триггеров *P* и *Q*, соединенных между собой комбинационными схемами, состоящими из логических элементов Шеффера 3, 4, 5, 6. Триггер *P* называется ведущим, а триггер *Q* – ведомым. Пусть исходным является состояние

$$P = Q = 0; \quad S = R = 1.$$

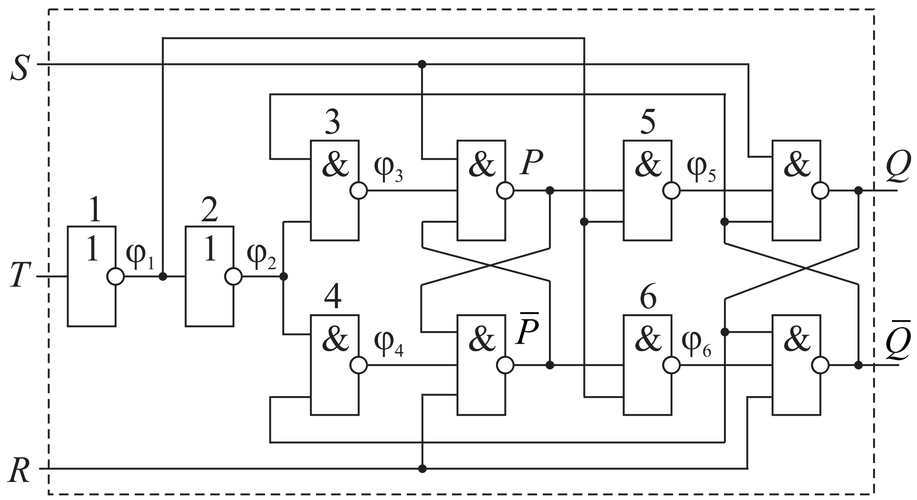


Рис. 10.2

Сначала предположим, что $T = 0$, тогда

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0; \quad \varphi_3 = \varphi_4 = 1, \quad \varphi_5 = 1, \quad \varphi_6 = 0.$$

Эти значения отмечены в первой строке таблицы 10.1. Кроме того, в ней указано:

$$P = Q = 0.$$

Таблица 10.1

№	T	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	P	φ_5	φ_6	Q
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	1	1	1	0
3	0	1	0	1	1	1	0	1	1
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	0

Состояние $P = 0$ обусловлено тем, что $\varphi_3 = \varphi_4 = S = R = 1$ (режим хранения информации), а $Q = 0$, благодаря тому, что $\varphi_6 = 0$. Состояния T, P и Q отмечены на рисунке 10.3. На нём изображена диаграмма выходов триггеров P и Q, где показано, что при $T = 0$ (зона 1) триггеры P и Q находятся в состоянии нуля.

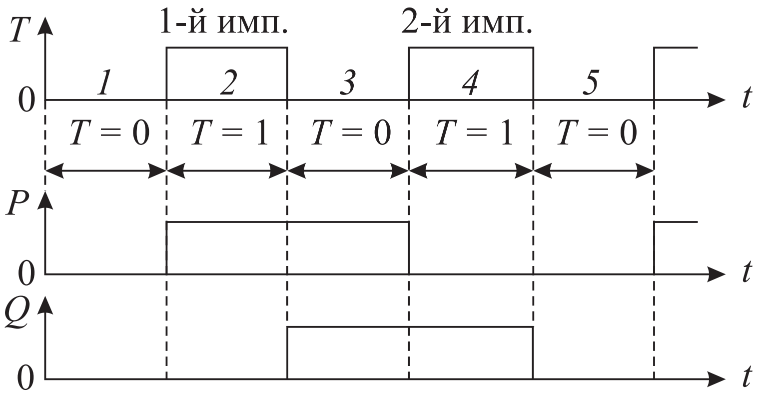


Рис. 10.3

Подадим на вход T высокий уровень. Низким уровнем выходного напряжения элемента *1* окажутся запертыми схемы *5* и *6*, вследствие чего:

$$\varphi_5 = \varphi_6 = 1,$$

и триггер Q перейдёт в режим хранения информации, оставшись в нулевом состоянии. Элементы *3* и *4* со стороны φ_2 окажутся открытыми. На вход элемента *4* с прямого выхода триггера Q поступил низкий уровень напряжения, а на вход элемента *3* с инверсного выхода $\overline{Q}$ – высокий уровень. Следовательно:

$$\varphi_3 = 0; \quad \varphi_4 = 1.$$

Так как $\varphi_3 = 0$, то триггер P перешёл в единичное состояние.

Все эти значения приведены во второй строке таблицы 10.1, а на рисунке 10.3 в зоне *2*, обозначенной надписью «1-й имп.» (т. е. первый импульс), отмечено, что при $T = 1$ триггер P находится в единичном состоянии, а Q – в нулевом. Таким образом, в момент положительного фронта входного импульса триггер P перешёл в единичное состояние, а ведомый триггер Q остался в состоянии нуля.

Подадим на вход T низкий уровень напряжения. На выходе элемента *2* получим низкий уровень. Триггер P перейдёт в режим хранения информации (так как $\varphi_3 = \varphi_4 = 1$), оставшись в единичном состоянии. С выхода элемента *1* на входы элементов *5* и *6* поступит высокий уровень. Поскольку $P = 1$ и $\varphi_1 = 1$, то

$$\varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = 1.$$

Триггер Q перейдёт в единичное состояние.

Все перечисленные изменения записаны в строке *3* таблицы 10.1. На рисунке 10.3 этой строке соответствует зона *3*, где отмечено, что при $T = 0$ триггеры P и Q находятся в единичном состоянии. Таким образом, с приходом отрицательного фронта входного импульса оба триггера окажутся в состоянии единицы.

Если на вход триггера подать второй импульс, то триггеры P и Q перейдут в нулевое состояние. На этом заканчивается полный цикл работы T-триггера. Состоит он из двух тактов. Под действием положительного фронта меняет состояние ведущий триггер P (первый такт). С приходом отрицательного фронта меняет состояние ведомый триггер Q (второй такт). В связи с этим T-триггер называют двухтактным.

Условное изображение T-триггера приведено на рисунке 10.4. Надпись TT на этом рисунке говорит о том, что триггер является двухтактным, т. е. содержит два RS-триггера, из которых один реагирует на положительный перепад входного напряжения, второй – на отрицательный. А так как к ведущему триггеру доступа нет, то о состоянии T-триггера можно судить лишь по уровням напряжения на выходах ведомого RS-триггера: T-триггер меняет состояние под действием только отрицательного фронта входного импульса, а на положительный фронт T-триггер не реагирует.

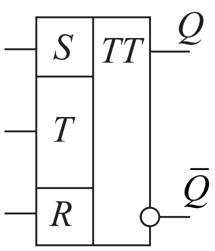


Рис. 10.4

10.3 Синтез синхронного автомата на *T*-триггерах

В схеме синхронного автомата тактовый (синхронизирующий) импульс непосредственно управляет каждым триггером (рис. 10.5). Тактовые импульсы поступают на один из входов элементов И, выходы которых подключены к счетным входам триггеров $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ко вторым входам схем И присоединены выходы комбинационной схемы, представляющей собой преобразователь входного n-разрядного двоичного кода в n-разрядный выходной код, разряды которого обозначены символами $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Буквой Y обозначена шина установки автомата в исходное (нулевое) состояние.

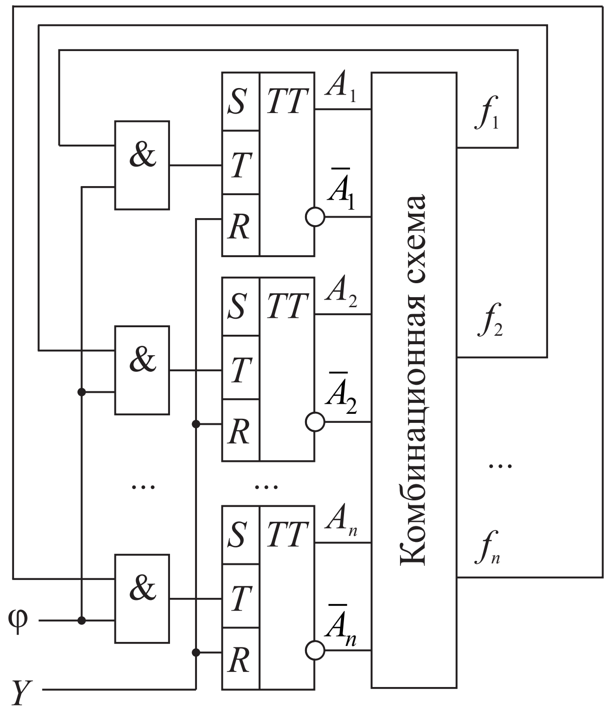


Рис. 10.5

Зафиксируем какой-либо момент времени между синхроимпульсами, когда $\varphi = 0$. Триггеры находятся в некоторых состояниях, образующих набор значений аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Этому набору на выходах $f_1, f_2, \ldots, f_n$ соответствует набор высоких и низких уровней. Когда на вход φ поступит синхроимпульс, он пройдет только через те схемы И, на которые поданы высокие уровни с выходов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Задача синтеза автомата сводится к построению комбинационной схемы, распределяющей тактовые импульсы по входам триггеров так, чтобы автомат менял свои состояния в соответствии с заданными условиями.

Метод построения такого автомата проиллюстрируем на примере четырёхразрядного синхронного реверсивного счётчика: если $A = 0$, то счёт ведётся в прямом направлении по замкнутому циклу: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, …; при $A = 1$ счёт ведётся в обратной последовательности: 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 7, … .

Очевидно, что для схемы необходимо четыре триггера: из них триггер A переключает направления счета, а для реализации собственно счета необходимо ещё три триггера B, C, D. Составим таблицу переходов (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Дес.	A	B	C	D	f_B	f_C	f_D
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1	1
15	1	1	1	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1
13	1	1	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	1	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1
10	1	0	1	0	0	1	1
9	1	0	0	1	0	0	1

В средней части таблицы, где приведены колонки, обозначенные логическими переменными A, B, C, D, записаны состояния автомата. Когда $A = 0$, автомат ведет счет в прямом направлении: 000, 001, 010, …, 111, а когда $A = 1$, то счет идет в обратной последовательности: 000,111, 110, …, 001.

В левой колонке, обозначенной «Дес.» (десятичные числа), указаны десятичные эквиваленты четырехзначных двоичных чисел, записанных в строках таблицы. При этом учитывается и переключающий триггер A.

Правая часть таблицы 10.2 содержит колонки f_B, f_C, f_D. Это выходы комбинационной схемы, управляющей триггерами B, C, D.

Заполняем правую часть таблицы. В верхней строке записано: 0000. Если на вход φ (рис. 10.5) подать импульс, то автомат должен перейти в состояние 0001. Это произойдет в том случае, если тактовый импульс поступит на вход триггера D и не пройдет на входы триггеров B и C. В строке 0000 в правой части таблицы записываем 001. Пусть автомат перешел в состояние 0001. Второй тактовый импульс должен пройти на входы триггеров C и D одновременно. Тогда триггер C перейдет в единицу, а триггер D – в нуль. Во второй сверху строке в правой части записываем 011. Третий импульс должен перевести автомат в состояние 0011. Так как после второго импульса установилось состояние 0010, то для перевода автомата в состояние 0011 необходимо подать импульс только на вход триггера D. В третьей строке записываем 001. И так далее до строки 7, после чего с подачей импульса должно установиться состояние 000. В колонках правой части ставим три единицы, обозначающие: триггеры B, C, D сменят свои состояния на противоположные.

Вторая половина таблицы заполняется точно так же. Получилась таблица соответствия для трех функций. Список их минимальных форм имеет вид:

$$f_B = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}CD; \quad f_C = A\overline{D} + \overline{A}D; \quad f_D = 1.$$

Умножим каждое из полученных выражений на φ:

$$T_B = (A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}CD)\varphi;\ T_C = (A\overline{D} + \overline{A}D)\varphi;\ T_D = 1\cdot\varphi = \varphi.$$

На основе этих функций строим автомат. Его схема приведена на рисунке 10.6.

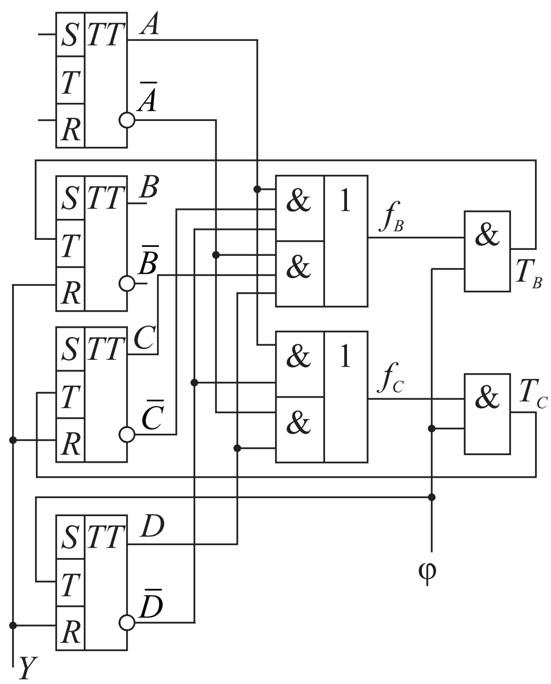


Рис. 10.6

Упражнения

1. Автомат на рисунке 10.6 находится в состоянии 0110. Укажите состояние q, в котором окажется автомат, если принять A = 1, а затем на вход подать один импульс, где q – десятичное число. Считать, что значение A входит в код q.

2. Автомат на рисунке 10.6 находится в состоянии 0111. На вход его подали два импульса, а затем установили A = 1. Укажите состояние q, в котором окажется автомат, где q – десятичное число. Считать, что значение A входит в код q.

10.4 Триггер типа *JK*

Один из вариантов триггера *JK* изображен на рисунке 10.7. Отличается он от вышерассмотренного *T*-триггера только тем, что элементы Шеффера *3* и *4* являются не двухвходовыми, а трёхвходовыми. Эти добавленные входы обозначены буквами *J* и *K*, обозначающие единичный и нулевой входы соответственно. Во всём остальном схемы триггеров *T* и *JK* одинаковы. Однако по своим функциональным возможностям они существенно различаются.

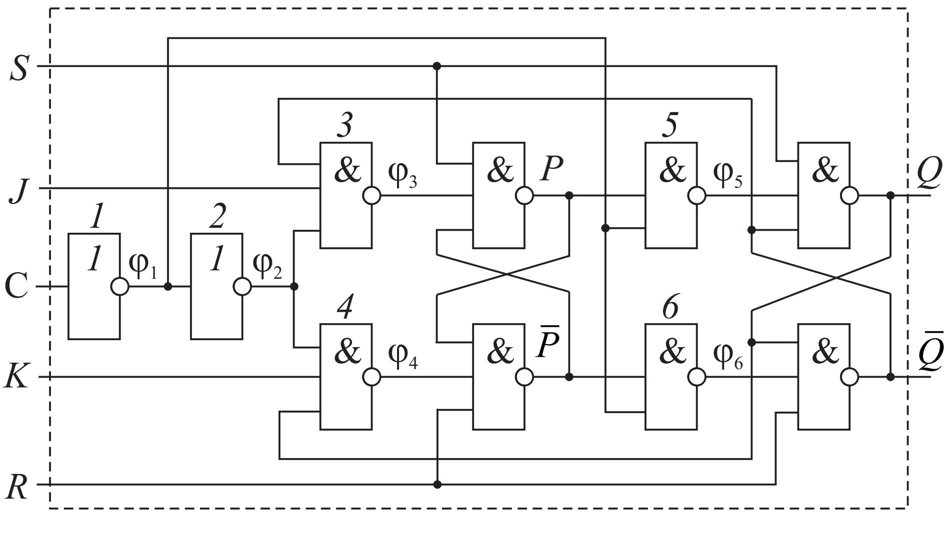


Рис. 10.7

JK-триггер меняет свои состояния под действием отрицательных фронтов прямоугольных импульсов, поступающих на его синхровход, обозначенный на рисунке 10.7 буквой «С» русского алфавита. Изменение уровней напряжения на входах *J* и *K* обычно происходит в те моменты времени, когда на синхровходе напряжение равно нулю.

JK-триггер может работать в одном четырёх режимов. Рассмотрим их:

1) $J = K = 0$. Синхроимпульсы, поступающие на вход С, состояние триггера не меняют. Это режим хранения информации;
2) $J = 0$, $K = 1$. В этом случае под действием синхроимпульса триггер переходит в нулевое состояние независимо от предыдущего;
3) $J = 1$, $K = 0$. Синхроимпульс переводит триггер в единичное состояние;
4) $J = 1$, $K = 1$. Триггер под действием синхроимпульса переходит в противоположное состояние (превращается в *T*-триггер).

Условное обозначение *JK*-триггера приведено на рисунке 10.8.

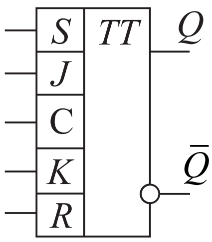


Рис. 10.8

Триггер *JK*, как и *T*-триггер, является двухтактным.

10.5 Синтез многотактных автоматов на *JK*-триггерах

Метод построения многотактных автоматов с использованием *JK*-триггеров рассмотрим на примере. Пусть требуется разработать схему, состояния которой менялись бы в последовательности следующих трёхзначных двоичных чисел, начиная с исходного 011:

011, 100, 010, 000, 101, 111, 110, 001, …

и так далее по замкнутому циклу. В десятичной системе эта последовательность имеет вид: 3, 4, 2, 0, 5, 7, 6, 1, … .

Так как всего имеется восемь различных состояний, то для построения схемы необходимо три триггера. Обычно в автоматах выделяется одно состояние, называемое начальным (исходным). В данном случае начальным является состояние 011, следовательно, к шине *Y* (установка исходного состояния) присоединяем вход *R* триггера *A*, вход *S* триггера *B* и вход *S* триггера *C*.

Автомат согласно условию работает по замкнутому циклу, следовательно, строить таблицу переходов можно с любого состояния. Пусть это будет состояние 011, как указано в условии, где последовательность начинается с двоичного числа 011 (табл. 10.3). В левой колонке, обозначенной «Дес.», записаны десятичные числа заданной последовательности состояний. В колонках *A*, *B*, *C* приведены те же числа, но в двоичном коде. В правой части таблицы содержится шесть колонок, так как *JK*-триггеры имеют по два входа. Каждому из этих входов соответствует определённая булева функция. Задача синтеза автомата сводится к нахождению булевых функций, выступающих в роли уравнений входов.

Таблица 10.3

Дес.	$A\ B\ C$	$J_A\ K_A$	$J_B\ K_B$	$J_C\ K_C$
3	0 1 1	1 ×	× 1	× 1
4	1 0 0	× 1	1 ×	0 ×
2	0 1 0	0 ×	× 1	0 ×
0	0 0 0	1 ×	0 ×	1 ×
5	1 0 1	× 0	1 ×	× 0
7	1 1 1	× 0	× 0	× 1
6	1 1 0	× 1	× 1	1 ×
1	0 0 1	0 ×	1 ×	× 0

Заполняем таблицу.

Под действием первого синхроимпульса должно установиться состояние 100, как это указано во второй строке таблицы в колонках *A*, *B*, *C*. Триггер *A* перейдет в состояние единицы, если на вход J_A поступит высокий уровень. Следовательно, в колонке J_A строки 011 записываем единицу. В колонке K_A при этом ставим крестик (неопределенное состояние), так как триггер *A* перейдет в единичное состояние независимо от того, высокий или низкий уровень будет на входе K_A. Триггер *B* перейдет в состояние нуля, если на вход K_B подать высокий уровень, а на вход J_B – безразлично какой, высокий или низкий. Следовательно, в колонке K_B записываем единицу, а в колонке J_B – крестик (неопределённость). То же самое относится и к колонкам J_C и K_C.

Допустим, что первый синхроимпульс прошел на вход схемы и установил ее в состояние 100. Под действием второго импульса автомат должен перейти в состояние 010. Триггер *A* перейдет в нулевое состояние, если на вход K_A подать высокий уровень. На входе S_A при этом может быть высокий или низкий уровень – безразлично какой из них. Следовательно, в колонке K_A записываем единицу, а в колонке J_A ставим крестик, т. е. неопределённость.

Триггер B перейдет в состояние единицы, если при любом уровне на входе K_B на вход J_B поступит высокий уровень. В связи с этим в колонке J_B записываем единицу, а в колонке K_B – крестик (неопределённость).

Триггер C должен остаться в нулевом состоянии. Это возможно, если на входе J_C будет поддерживаться низкий уровень, а на входе K_C может быть как низкий уровень, так и высокий. Это неопределённость. Следовательно, в колонке J_C записываем нуль, а в колонке K_C – крестик.

Аналогично заполняем всю правую часть таблицы, после чего рассматриваем её как таблицу соответствия для шести функций, являющихся, согласно [48], уравнениями входов. СДНФ их имеют вид:

$$J_A = (0, 3); [4, 5, 6, 7];$$
$$K_A = (4, 6); [0, 1, 2, 3];$$
$$J_B = (1, 4, 5); [2, 3, 6, 7];$$
$$K_B = (2, 3, 6); [0, 1, 4, 5];$$
$$J_C = (0, 6); [1, 3, 5, 7];$$
$$K_C = (3, 7); [0, 2, 4, 6],$$

где в квадратных скобках перечислены неопределённые состояния.

В результате минимизации получаем:

$$J_A = BC + \overline{B}\,\overline{C};\; K_A = \overline{C};\; J_B = A + C;\; K_B = \overline{A} + \overline{C};\; J_C = AB + \overline{A}\,\overline{B};\; K_C = B.$$

Схема автомата приведена на рисунке 10.9. Буквой Y на схеме обозначена установка исходного состояния. Импульсы генератора подаются на шину C, к которой подключены синхровходы всех триггеров.

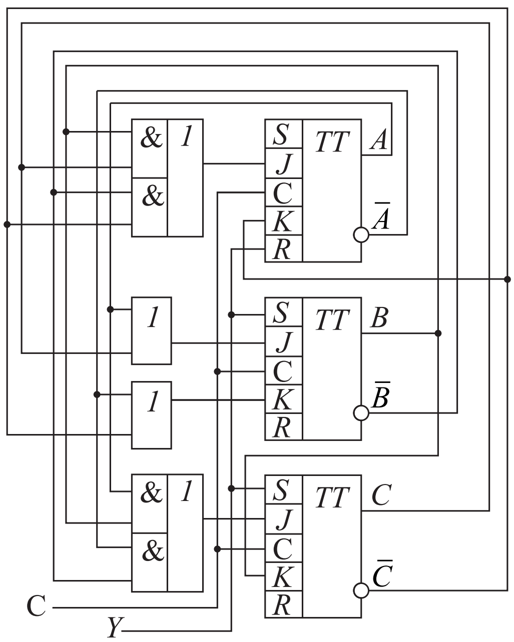


Рис. 10.9

Упражнения

1. Автомат содержит четыре триггера типа *JK*. Триггеры обозначены буквами *A*, *B*, *C*, *D*. Работает автомат следующим образом. Если $A = 0$, $B = 0$, то под действием синхроимпульсов число в регистре, состоящем из триггеров *C* и *D*, меняется в последовательности 1, 2, 0, 3. Если $A = 0$, $B = 1$, то последовательность другая. Она имеет вид 2, 3, 1, 0. При $A = 1$, $B = 0$ реализуется последовательность 0, 1, 2, 3. Если принять $A = 1$, $B = 1$, то состояния регистра меняются в последовательности 1, 3, 2, 0. Постройте схему автомата и определите:

1) сколько единиц в колонке J_C таблицы переходов?

2) сколько нулей в колонке J_D таблицы переходов?

3) сколько существует наборов, на которых функция K_D не определена?

4) сколько букв в минимальной ДНФ функции J_C? K_C? J_D? K_D?

2. Автомат, содержащий четыре триггера, обозначенные буквами *A*, *B*, *C*, *D*, реализует замкнутую последовательность: 0, 1, 2, …, 14, 15. Постройте схему автомата и определите:

1) сколько единиц в колонке J_D таблицы переходов?

2) сколько нулей в колонке K_D таблицы переходов?

3) сколько состояний в колонке J_B отмечены как неопределённые?

4) сколько букв в минимальной ДНФ функции J_A? J_B? J_C? J_D?

10.6 Триггер типа *D*

На рисунке 10.10 изображена схема ещё одного универсального триггера, известного в литературе под названием триггера типа *D*. Этот триггер имеет синхровход и, подобно *T*-триггеру, один вход информационный. Если сравнить его с *JK*-триггером, то нетрудно заметить, что схемы их мало отличаются одна от другой: если вход *K* на рисунке 10.7 подключить к выходу инвертора, а вход инвертора соединить со входом *J*, переименовав его на *D*, то получится *D*-триггер. Условное обозначение *D*-триггера приведено на рисунке 10.11.

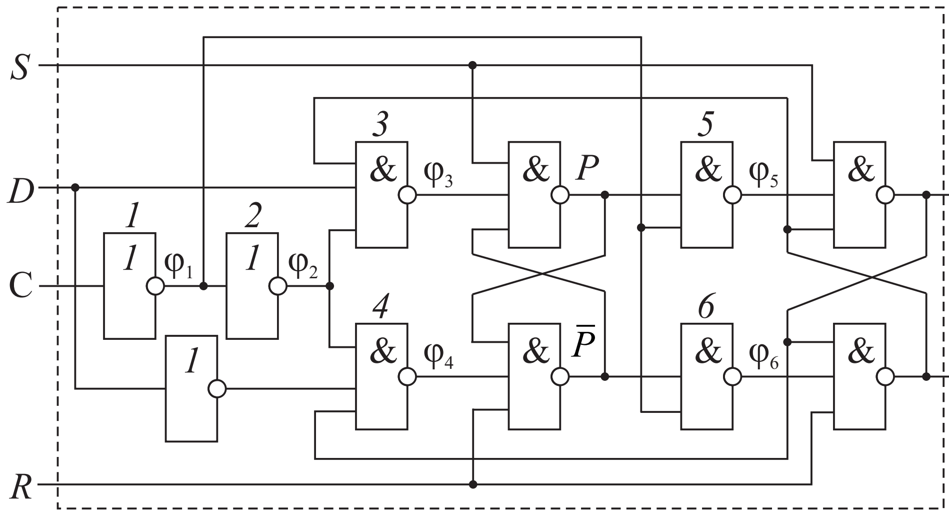


Рис. 10.10

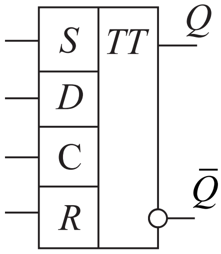


Рис. 10.11

Логика работы *D*-триггера проста:

1) если на вход *D* подать высокий уровень напряжения, то синхроимпульс переведёт триггер в единичное состояние;
2) если на вход *D* подать низкий уровень, то синхроимпульс переведёт триггер в нулевое состояние.

Иными словами: синхроимпульс переводит триггер в то состояние, какое подано на его информационный вход *D*. Если на входе *D* низкий уровень, то синхроимпульс переведёт триггер в нулевое стояние. Если на входе *D* высокий уровень, то синхроимпульсом триггер переведётся в состояние единицы.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий построение автомата на *D*-триггерах табличным методом. Пусть автомат меняет свои состояния в замкнутой последовательности вида:

1, 10, 11, 0, 14, 3, 2, 8, 7, 9, 13, 4, 5, 6, 15, 12.

Всего 16 состояний, следовательно, потребуется четыре триггера. Обозначим их буквами A_1, A_2, A_3, A_4. Строим таблицу в соответствии с логикой работы *D*-триггера (табл. 10.4). Пусть начальным является состояние 0001, указанное в левой части таблицы 10.4. Если на синхронизирующий вход поступит импульс, то автомат должен перейти в состояние 1010, записанное во второй строке левой части таблицы 10.4. Чтобы переход состоялся, число 1010 запишем справа от начального состояния 0001.

Таблица 10.4

Дес.	A_1 A_2 A_3 A_4	D_1 D_2 D_3 D_4
1	0 0 0 1	1 0 1 0
10	1 0 1 0	1 0 1 1
11	1 0 1 1	0 0 0 0
0	0 0 0 0	1 1 1 0
14	1 1 1 0	0 0 1 1
3	0 0 1 1	0 0 1 0
2	0 0 1 0	1 0 0 0
8	1 0 0 0	0 1 1 1
7	0 1 1 1	1 0 0 1
9	1 0 0 1	1 1 0 1
13	1 1 0 1	0 1 0 0
4	0 1 0 0	0 1 0 1
5	0 1 0 1	0 1 1 0
6	0 1 1 0	1 1 1 1
15	1 1 1 1	1 1 0 0
12	1 1 0 0	0 0 0 1

Под действием следующего импульса автомат должен перейти в состояние 1011. Записываем его справа от кода 1010, находящегося во второй строке левой половины таблицы 10.4.

Рассуждая аналогично, заполняем всю таблицу.

После минимизации получаем следующий список булевых функций:

$$D_1 = A_2A_3A_4 + \overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3;$$

$$D_2 = \overline{A}_1A_2\overline{A}_4 + A_1A_2A_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_3\overline{A}_4;$$

$$D_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_3A_4 + A_2A_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3;$$

$$D_4 = A_2\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Схема автомата, построенного на основе этой системы булевых функций, приведена на рисунке 10.12. Схема изображена по упрощённому варианту: провода, соединяющие входы комбинационной схемы и выходы триггеров, не изображены, вместо них указаны только буквы, как адреса, показывающие, к какому триггеру должен быть подключен тот или иной вход комбинационной части автомата.

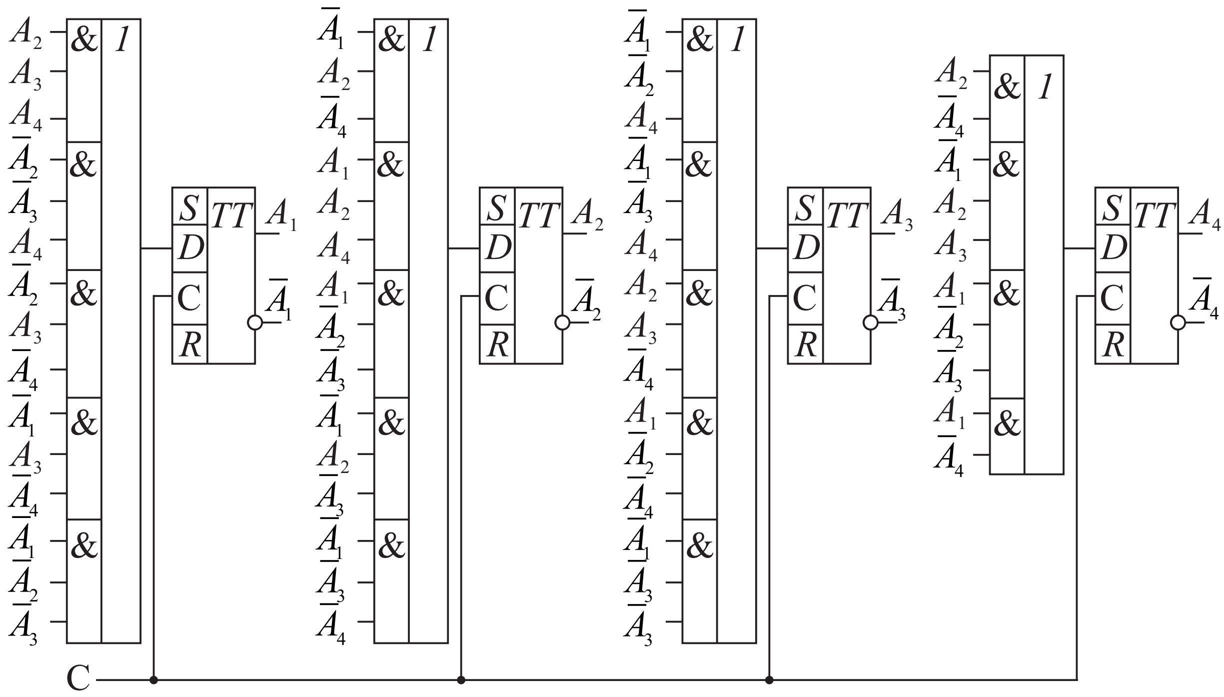


Рис. 10.12

10.7 Автомат с памятью – это сочетание запоминающих элементов и комбинационных схем

На первый взгляд в многотактных устройствах главную роль играют запоминающие элементы, например триггеры, а что касается комбинационных преобразователей, то в некоторых случаях можно обойтись и без них. На самом же деле комбинационные схемы как преобразователи кодов есть во всех многотактных автоматах, за исключением отдельных (тривиальных) случаев. Проиллюстрируем это на примере четырёхразрядного сдвигового регистра, основанного на *D*-триггерах. Проведём его синтез табличным методом.

В левой части таблицы 10.5 перечислены все числа, которые могут быть записаны в сдвиговый регистр при помощи установочных входов *R* и *S*. В правой части каждому левому числу поставлено то же самое число, но сдвинутое вправо по замкнутому циклу. Например, в нулевой строке слева записано число 0000. Так как единиц в этом числе нет, то после сдвига оно не изменится. Соответственно в правой части нулевой строки записываем 0000. В первой строке записано 0001. Если на вход сдвигового регистра подать импульс, то вместо 0001 в нём должно оказаться число 1000. Именно это число записано справа в первой строке таблицы 10.5.

Таблица 10.5

Дес.	A_1 A_2 A_3 A_4	D_1 D_2 D_3 D_4
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	1 0 0 0
2	0 0 1 0	0 0 0 1
3	0 0 1 1	1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 0 1 0
5	0 1 0 1	1 0 1 0
6	0 1 1 0	0 0 1 1
7	0 1 1 1	1 0 1 1
8	1 0 0 0	0 1 0 0
9	1 0 0 1	1 1 0 0
10	1 0 1 0	0 1 0 1
11	1 0 1 1	1 1 0 1
12	1 1 0 0	0 1 1 0
13	1 1 0 1	1 1 1 0
14	1 1 1 0	0 1 1 1
15	1 1 1 1	1 1 1 1

Аналогичным образом заполняем всю таблицу. Получилась таблица истинности для четырёх функций, D_1, D_2, D_3, D_4, описывающих работу комбинационной схемы, преобразующей входное двоичное число в выходное, сдвинутое вправо на один разряд по замкнутому циклу. Входами преобразователя служат выходы триггеров регистра, а выходы преобразователя выступают в роли уравнений входов тех же триггеров.

СДНФ и минимальные ДНФ функций D_1, D_2, D_3, D_4 имеют вид:

$$D_1 = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15) = A_4;$$
$$D_2 = (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) = A_1;$$
$$D_3 = (4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15) = A_2;$$
$$D_4 = (2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15) = A_3.$$

Комбинационная схема, построенная на основе этих функций, приведена на рисунке 10.13. В ней нет логических элементов, так как минимальные формы функций D_1, D_2, D_3 и D_4 являются предельно простыми, не содержащими логических операций И, ИЛИ, НЕ (но если допустить ошибку при минимизации, то логические элементы могут появиться). Комбинационная схема состоит только из отдельных проводов. Соединим этими проводами D-триггеры. Получится сдвиговый регистр (рис. 10.14). Хранящееся в нём число через комбинационную схему, изображённую на рисунке 10.13, под действием синхроимпульса переписывается в этот же регистр.

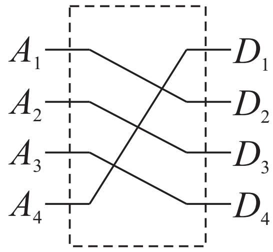


Рис. 10.13

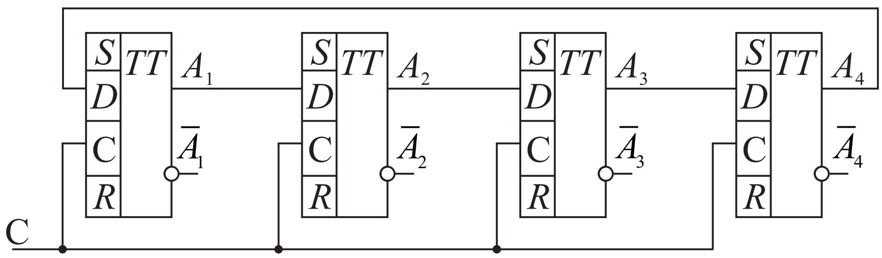


Рис. 10.14

В сущности, всякий многотактный автомат представляет собой сочетание запоминающих регистров и комбинационных преобразователей, а работа автомата сводится к переписи чисел из регистра в регистр через комбинационные схемы. Даже при переписи чисел из регистра в регистр без каких-либо их преобразований имеется комбинационная схема.

Таким образом, работа практически любого цифрового устройства, содержащего триггерные регистры, сводится к операциям переписи чисел из регистра в регистр через комбинационные преобразователи. Кроме того, необходимо отметить, что числа из регистра в регистр могут переписываться в момент как положительных фронтов, так и отрицательных. Но в данной книге основное внимание уделено переписи по отрицательным фронтам, так как именно этот вариант переписи полностью согласуется с принятой в п. 7.1 интерпретацией булевых формул и образует основу теории, обеспечивающей высокую эффективность её применения как в задачах синтеза комбинационных схем, так и в задачах синхронных многотактных автоматов с памятью.

Заключение

В последние десятилетия выпущено много учебников и учебных пособий по различным разделам дискретной математики. Примерами могут служить издания [1; 2; 8; 14; 32; 33; 35; 38; 40; 51; 55; 57]. В основном подобные книги рассчитаны на студентов очного обучения: во многих из них содержатся упражнения, но нет ответов, т. е. самоконтроль исключён [14; 32; 33; 35; 40]. Кроме того, в подавляющем большинстве случаев их авторы ориентируются главным образом на студентов как будущих профессиональных математиков, вследствие чего если и уделяют внимание прикладным вопросам, то лишь вскользь, эпизодически. Очевидно, что студентам системы дистанционного образования, изучающим специальности с прикладным уклоном, необходимы книги, в которых прикладные вопросы рассматриваются в гораздо большем объёме и предусмотрена возможность самоконтроля при выполнении упражнений. Эти два требования составили основу при разработке данного пособия.

Знания, полученные студентами при надлежащем усвоении материала, изложенного в пособии, помогут им при изучении специальных дисциплин, где в той или иной степени просматриваются дискретные структуры. Например, комбинаторика необходима при изучении таких дисциплин, как теория вероятностей, логико-лингвистические системы, информационные технологии и многие другие. При изучении программирования логических интегральных схем, цифровой обработки сигналов, основ компьютерного проектирования и др. находит применение алгебра логики. И вообще следует отметить, что разделы дискретной математики, рассмотренные в пособии, так или иначе встречаются в большинстве учебных предметов, относящихся к цифровой технике и учебным дисциплинам радиотехнического уклона.

Литература

1. Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.
2. Березина Л. Ю. Графы и их применение : пособие для учителей / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
3. Борунова С. Н. Орфографический словарь русского языка: Произношение, ударение, грамматические формы / С. Н. Борунова, В. Л. Воронцова, Н. А. Еськова. – М. : Рус. яз., 1989. – 688 с.
4. Бохманн Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф ; пер. с нем. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 401 с.
5. Бурова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика / И. Н. Бурова. – М. : Наука, 1976. – 176 с.
6. Вавилов Е. Н. Синтез схем электронных цифровых машин / Е. Н. Вавилов, Г. П. Портной. – М. : Сов. радио, 1963. – 440 с.
7. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М. : ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
8. Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М. : Наука, 1977. – 368 с.
9. Гетманова А. Д. Логика: Словарь и задачник / А. Д. Гетманова. – М. : Гуманит. изд. центр «ВЛАДОС», 1998. – 336 с.
10. Гжегорчик А. Популярная логика / А. Гжегорчик. – М. : Наука, 1972. – 111 с.
11. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. – М. : Наука, 1972. – 288 с.
12. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов / В. М. Глушков. – М. : Физматгиз, 1962. – 476 с.
13. Голышев Л. К. Электронные вычислительные машины / Л. К. Голышев. – Киев : Изд-во тех. лит. УССР, 1963. – 426 с.
14. Горбатов В. А. Дискретная математика : учеб. для студентов втузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. – М. : ООО «Издательство АСТ» ; ООО «Издательство Астрель», 2003. – 447 с.
15. Горелик А. Л. Некоторые вопросы построения систем распознавания / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. – М. : Сов. радио, 1974. – 224 с.

16. Грес П. В. Математика для гуманитариев / П. В. Грес. – М. : Университетская книга, Логос, 2007. – 160 с.
17. Ежов И. И. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 80 с.
18. Ершов Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
19. Ивин А. А. Логика / А. А. Ивин. – М. : Гардарики, 2001. – 224 с.
20. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств / Дж. Т. Калбертсон ; пер. с англ. – М. : Просвещение, 1965. – 267 с.
21. Кибернетика и логика / отв. ред. Б. В. Бирюков, А. Г. Спиркин. – М. : Наука, 1978. – 333 с.
22. Клини С. К. Математическая логика / С. К. Клини ; пер. с англ. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 480 с.
23. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств / С. Колдуэлл ; пер. с англ. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 737 с.
24. Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 119 с.
25. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник / Н. И. Кондаков. – М. : Наука, 1975. – 720 с.
26. Корченко А. Г. Построение систем защиты информации на нечётких множествах. Теория и практические решения / А. Г. Корченко. – Киев : МК-Пресс, 2006. – 320 с.
27. Криницкий Н. А. Автоматизированные информационные системы / Н. А. Криницкий, Г. А. Миронов, Г. Д. Фролов. – М. : Наука, 1982. – 384 с.
28. Кузин Л. Т. Основы кибернетики : в 2 т. Т. 2. Основы кибернетических моделей / Л. Т. Кузин. – М. : Энергия, 1979. – 584 с.
29. Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Физматлит, 2002. – 256 с.
30. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон ; Пер. с англ. – М. : Наука, 1971. – 320 с.

31. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечёткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
32. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях / Г. И. Москинова. – М. : Логос, 2003. – 240 с.
33. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
34. Нешков К. И. Множества. Отношения. Числа. Величины / К. И. Нешков, А. М. Пышкало, В. Н. Рудницкая. – М. : Просвещение, 1978. – 63 с.
35. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб. : Питер, 2003. – 304 с.
36. Ожегов С. И. Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. – М. : АЗЪ, 1995, – 928 с.
37. Очков В. Ф. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет / В. Ф. Очков, Е. П. Богомолова, Д. А. Иванов. – СПб. : Лань, 2016. – 388 с.
38. Палий И. А. Дискретная математика : курс лекций / И. А. Палий. – М. : Эксмо, 2008. – 352 с.
39. Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования / А. А. Папернов. – М. : Наука, 1968. – 591 с.
40. Плотников А. Д. Дискретная математика : учеб пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2005. – 288 с.
41. Политехнический словарь / гл. ред. И. И. Артоболевский. – М. : Советская энциклопедия, 1977. – 608 с.
42. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин. – М. : Педагогика, 1989. – 352 с.
43. Словарь иностранных слов / под ред. И. В. Лехина и др. – М. : Сов. Энциклопедия, 1964. – 784 с.
44. Советский энциклопедический словарь. – М. : Сов. Энциклопедия, 1985. – 1600 с.
45. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Стол ; пер с англ. – М. : Просвещение, 1968. – 231 с.
46. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы / В. Е. Тараканов. – М. : Наука, 1985. – 192 с.

47. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 207 с.
48. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных устройств / М. Фистер. ; пер. с англ. – Киев : Техника, 1964. – 382 с.
49. Форд Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1966. – 276 с.
50. Фор Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен /; пер. с фр. – М. : Мир, 1966. – 271 с.
51. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Кассами ; пер. с япон. – М. : Радио и связь, 1984. – 240 с.
52. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. – М. : КомКнига, 2006. – 296 с.
53. Чупахин И. Я. Формальная логика / И. Я. Чупахин, А. М. Плотников, К. А. Сергеев и др. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. – 357 с.
54. Шалыто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов / А. А. Шалыто. – СПб. : Наука, 2000. – 780 с.
55. Шевелев Ю. П. Дискретная математика : учеб. пособие / Ю. П. Шевелев. – СПб. : Лань, 2016. – 592 с.
56. Шевелев Ю. П. Математическая логика и теория алгоритмов / Ю. П. Шевелев. – Томск : Дельтаплан, 2007. – 219 с.
57. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2003. – 384 с.
58. Многотактное устройство [Электронный ресурс] // Большая энциклопедия нефти и газа. – Режим доступа: http://www.ngpedia.ru/id554468p1.html (дата обращения: 19.01.2017).

Ответы

1.1. *Понятие множества.* **1.** 1) 12; 2) 101; 3) 41. **2.** 1) 5; 2) 3; 3) 4.

1.2. *Понятие подмножества.* **1.** 1, 3, 5, 6. **2.** 32. **3.** 6. **4.** *а.* 7; *б.* 8; *в.* 58.

1.3. *Объединение, пересечение и дополнение множеств.* **1.** 1) 0, 1, 3, 5, 9; 2) 2, 3, 6, 7, 8; 3) 1, 2, 6; 4) 0, 1, 4, 6; 5) 8. **2.** 1) 2, 7, 8, 9; 2) 0, 5; 3) 4.

1.4. *Разность и симметрическая разность множеств*. **1.** 1) 0, 2, 3, 8; 2) 0, 5, 7, 8; 3) 2, 3. **2.** 1) 0, 3, 4, 8; 2) 0, 1, 2, 3, 5, 9; 3) 0, 2, 3, 9.

1.5. *Диаграммы Венна*. **1.** 1) 0, 2, 5, 6, 7; 2) 1, 3, 4, 8, 9; 3) 1, 3, 4, 8, 9; 4) 0, 2, 5, 6, 7. **2.** 1) 3, 5, 6, 7, 9; 2) 3, 6, 9; 3) 7; 4) 0, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

1.6. *Декартово произведение множеств*. **1.** 1) 9; 2) 5; 3) 6; 4) 6; 5) 4; 6) 10. **2.** 1) 0; 2) 1; 3) 4; 4) 1. **3.** 1) 7, 2; 2) 2, 7; 3) 5, 3; 4) 3, 5.

2.2. *Факториал*. **1.** 1) 8!; 2) 9!; 3) $(k-1)!$; 4) 11!. **2.** 1) 15; 2) 32. **3.** 1) 8; 2) 2. **4.** 3, 5, 7, 8, 9. **5.** 0, 4.

2.3. *Правило произведения в комбинаторике*. **1.** 125. **2.** 243. **3.** 3125. **4.** 96. **5.** 30. **6.** 1800. **7.** 900.

2.4. *Правило суммы в комбинаторике*. **1.** 10. **2.** 3. **3.** 7.

2.5. *Перестановки без повторений.* **1.** 24. **2.** 95. **3.** 720. **4.** 144.

2.6. *Перестановки с повторениями*. **1.** 252. **2.** 126. **3.** 64. **4.** 20. **5.** *а.* 4; *б.* 0; *в.* 179; *г.* 179; *д.* 0; *е.* 1.

2.7. *Размещения без повторений*. **1.** 60. **2.** 720. **3.** 120. **4.** 3024. **5.** 720.

2.8. *Размещения с повторениями*. **1.** 100. **2.** 162. **3.** 4096. **4.** 36. **5.** 180. **6.** 1024. **7.** 128.

2.9. *Сочетания без повторений*. **1.** 35. **2.** 210. **3.** 35. **4.** 512. **5.** 5, 6. **6.** 56 **7.** 220. **8.** 126. **9.** 210.

2.10. *Сочетания с повторениями*. **1.** 816. **2.** 1) 1001; 2) 286; 3) 36.

3.1. *Понятие графа*. **1.** 32. **2.** 256. **3.** 21. **4.** 1) 8; 2) 64; 3) 1024. **5.** *а.* 190; *б.* 153; *в.* 6.

3.2. *Смежность. Инцидентность. Степень вершины*. **1.** *а.* 2, 5, 6; *б.* 3, 4, 7; *в.* 1; *г.* 2, 4, 6; *д.* 3211221. **2.** 1) а, в, д, е, ж; 2) а, б, г, е; 3) в, г, е.

3.3. *Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа*. **1.** 21. **2.** 2, 3, 5, 7. **3.** 45. **4.** 15. **5.** 12. **6.** *а.* 8; *б.* 124. **7.** 13.

3.4. *Маршруты, цепи, циклы*. **1.** 1, 5. **2.** 2, 3, 4. **3.** б, е.

3.5. *Связность графа*. **1.** 3. **2.** 3. **3.** а, в, г, д.

3.6. *Нахождение простых цепей в простом графе*. **1.** 19. **2.** 4, 7, 7. **3.** *а.* 8; *б.* 1, 1, 3, 3. **4.** в, г, д.

3.7. *Двудольные графы*. **1.** 28. **2.** 13, 11. **3.** 48. **4.** 162. **5.** 16. **6.** б, д, е, з. **7.** 1, 2, 4, 5, 7. **8.** 1, 2, 7.

3.8. *Двойственные графы*. **1.** 7, 9, 4. **2.** 4, 6, 4. **3.** 3, 4, 5, 6, 8. **4.** 3, 5.

3.9. *Древовидные графы*. **1.** 0. **2.** 17. **3.** 37. **4**. 28. **5.** 21. **6.** 14. **7.** 1, 2, 3, 4, 5, 7.

4.1. *Вводные понятия*. **1.** 1, 0, 0, 1, 1. **2.** 1) 20; 2) 15; 3) 15; 4) 20. **3.** 1) 1022; 2) 1002.

4.2. *Логические операции и формулы*. **1.** 1, 2, 3. **2.** 2, 4, **3.** 2, 3.

4.3. *Нормальные формы булевых выражений.* **1.** 1, 2, 5, 6, 7. **2.** 2, 3, 5. **3.** 1, 2, 3, 5, 6, 7. **4.** 2, 5. **5.** 1, 5, 6. **6.** 1, 2, 3, 4.

4.4. *Вычисление значений булевых формул.* **1.** 1) 1, 0, 1; 2) 1, 0, 0; 3) 1, 0, 0; 4) 1, 0, 0. **2.** 1) 0, 1, 0, 0; 2) 1, 0, 1, 0; 3) 0, 1, 1, 0; 4) 0, 1, 1, 0.

4.5. *Основные теоремы алгебры логики*. **1.** A, K. **2.** 1) PQ; 2) XZ; 3) ABC; 4) AD. **3.** 1) AB; 2) 0; 3) 1; 4) $A + B$; 5) 1; 6) 1; 7) 0; 8) 0.

4.6. *Понятие булевой функции*. **1.** 4, 4. **2.** 2, 6. **3.** 13. **4.** 1) 3, 6; 2) 1, 6, 7; 3) 0, 3, 7; 4) 5, 6, 7.

4.7. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма*. **1.** 1) 11001; 2) 010; 3) 0101; 4) 1101; 5) 101010; 6) 01. **2.** 1, 6, 7. **3.** 1) 9; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 5; 6) 0. **4.** 32. **5.** 32. **6.** 34.

4.9. *О формах высших порядков*. **1.** 1) 5; 2) 5; 3) 6; 4) 5; 5) 6. **2.** 1) 6; 2) 7; 3) 7; 4) 6; 5) 7; 6) 7.

5.1. *Алгебраическое упрощение булевых формул*. **1.** 1) 3, 3; 2) 3, 5; 3) 1, 4; 4) 1, 4; 5) 2, 8; 6) 2, 7; 7) 3, 5; 8) 1, 4. **2.** 1) Q; 2) P; 3) $P + Q$; 4) ABC; 5) P; 6) $B + C$.

5.2. *Метод Квайна*. **1.** 1) 10, 40; 2) 1, 10; 3) 3, 2; 4) 6, 17. **2.** 1) 3, 5; 2) 4, 9; 3) 3, 8; 4) 3, 6; 5) 5, 11.

5.3. *Метод Петрика*. **1.** 1) 10, 12; 2) 10, 16; 3) 2, 8; 4) 2, 11; 5) 1, 6; 6) 2, 11. **2.** 1) 6, 24; 2) 3, 10; 3) 4, 14; 4) 2, 4; 5) 4, 7.

5.6. *Операции над функциями, представленными в СДНФ*. **1.** 1) 7; 2) 13; 3) 1; 4) 9; 5) 19; 6) 25. **2.** 32. **3.** 1024. **4.** 1) 7; 2) 5; 3) 12; 4) 14; 5) 13; 6) 12. **5.** 1) 12; 2) 3; 3) 15; 4) 1; 5) 6; 6) 7. **6.** 2, 4, 8, 16.

5.7. *Минимизация ДНФ при помощи карт Вейча*. **1.** 1) 2, 3; 2) 3, 6; 3) 2, 5; 4) 1, 1; 5) 3, 3; 6) 2, 4. **2.** 1) 3, 6; 2) 3, 4; 3) 4, 6.

6.1. *Минимизация конъюнктивных нормальных форм булевых функций*. **1.** 1) 8, 12; 2) 7, 11; 3) 5, 8; 4) 7, 12; 5) 6, 11. **2.** 1) 7, 11; 2) 8, 12; 3) 4, 7; 4) 7, 12; 6, 10.

6.5. *Упрощение логических выражений в алгебре Жегалкина*. **1.** 1) 1, 0, 0; 2) 0, 1, 0. **2.** 1) 0, 1, 1; 2) 0, 1, 0. **3.** 1) ABC; 2) BC; 3) AC; 4) BC. **4.** 1) $A \oplus B \oplus C$; 2) $A \oplus BC$; 3) $A \oplus B \oplus C \oplus 1$; 4) $AB \oplus CD$. **5.** 1) $B + C$; 2) $A + \overline{B}C$; 3) $A\overline{B} + \overline{C}$.

6.6. *Производная от булевой функции*. **1.** 0, 1, 2. **2.** 1) 1, 3, 5; 2) 0, 2, 4; 3) 1, 3, 7; 4) 2, 4, 6. **3.** 1) BC; 2) $B\overline{C}\,\overline{D}$; 3) B; 4) $B + C$. **4.** 1) $A + \overline{C}$; 2) $\overline{A}C$; 3) $A\overline{C}$; 4) 0.

6.7. *Дифференцирование булевых функций с применением карт Вейча*. **1.** 14, 5. **2.** 7, 12. **3.** 10, 11.

6.8. *Симметрические булевы функции*. **1.** 35. **2.** 2, 3, 4, 7. **3.** 1, 2, 3.

7.8. *Задача о звонке и осветительных лампах*. **1.** а, б, в. **2.** 0, 0. **3.** 220, 220. **4.** 110, 110, 0, 220.

7.9. *Инверсные структуры*. **1.** *а.* 4, 8, 3; *б.* 0, 1, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15; *в.* 2, 3, 6, 8, 10, 14; *г.* 3, 8, 5. **2.** 1) 4, 10, 2; 2) 5, 8, 2; 3) 2, 8, 6; 4) 0, 1, 2, 3, 6, 10.

8.2. *Электрическая схема элемента И*. **1.** 0. **2.** 5. **3.** 5.

8.3. *Электрическая схема элемента ИЛИ*. **1.** 5. **2.** 5. **3.** 0.

8.4. *Электрическая схема элемента НЕ (инвертора)*. **1.** 5. **2.** 5. **3.** 0.

8.6. *Построение комбинационных схем*. **1.** 1) 1, 1; 2) 1, 2; 3) 3, 3. **2.** 2, 2.

8.7. *О весовых и невесовых кодах*. **1.** 8, 10. **2.** 6, 10. **3.** 2. **4.** 6, 9.

9.2. *Линейные функции*. **1.** 1, 3, 5. **2.** 1, 2, 5. **3.** 1, 3, 4, 5.

9.3. *Монотонные функции*. **1.** 1, 2, 3, 4. **2.** 1, 4, 5. **3.** 3, 4, 5.

9.4. *Самодвойственные функции*. **1.** 1, 5. **2.** 2, 4, 5, 6.

9.5. *Функции, сохраняющие единицу*. **1.** 1, 2, 6. **2.** 2, 4, 6.

9.6. *Функции, сохраняющие нуль*. **1.** 1, 2, 5, 6. **2.** 1, 2, 3, 5, 6.

10.3. *Синтез синхронного автомата на Т-триггерах.* **1.** 13. **2.** 15.

10.5. *Синтез многотактных автоматов на JK-триггерах*. **1.** 1) 5; 2) 3; 3) 8; 4) 6, 9, 9, 6. **2.** 1) 8; 2) 0; 3) 8; 4) 3, 2, 1, 0.

Предметный указатель